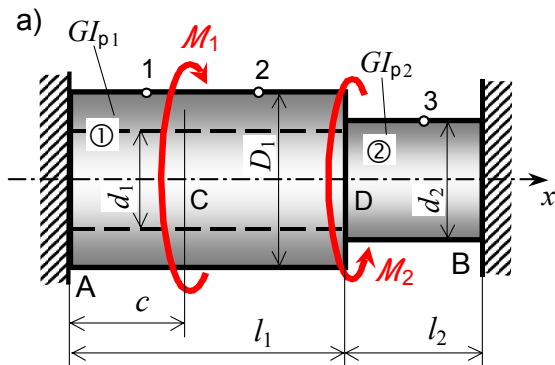


3. Primjer: Uvijanje statički neodređenog ravnog štapa okruglog presjeka

(Zadatak 6. Primjer F) na 11. str. "Vježbenica ispitnih zadataka", primjenom na PC modula "Torzija.exe" paketa programa "CVRSTOCA").



Za ravni čelični štap ukliješten na oba kraja, slika a), treba odrediti:

a) dopušteno opterećenje zakretnim momentima ($M_{\text{dop}} = ?$), ako je zadano:

$$M_1 = 2|M_2|, \quad l_1 = 1,2 \text{ m}, \quad l_2 = 0,6 \text{ m}, \quad c = 0,5 \text{ m}, \\ d_1 = 8 \text{ cm}, \quad D_1 = 12 \text{ cm}, \quad d_2 = 9 \text{ cm}, \quad G = 80 \text{ GPa}, \\ \tau_{\text{dop}} = 60 \text{ MPa}, \quad \vartheta_{\text{dop}} = 0,25^\circ/\text{m}.$$

b) Za opterećenje štapa zakretnim momentom iznosa $M = 5 \text{ kN}\cdot\text{m}$ odrediti reaktivne momente u A i B, provjeriti čvrstoću i krutost dijelova ① i ② štapa, te odrediti kutove zakreta presjeka C i D.

c) Skicirati dijagrame momenata uvijanja i kutova zakreta presjeka duž štapa.

Rješenje:

a) Dopušteno opterećenje štapa zakretnim momentima

Geometrijske značajke površina poprečnog presjeka dijelova ① i ② štapa su:

$$I_{p1} = \frac{\pi D_1^4}{32} \left[1 - \left(\frac{d_1}{D_1} \right)^4 \right] = \frac{\pi \cdot 12^4}{32} \left[1 - \left(\frac{8}{12} \right)^4 \right] = 1633,63 \text{ cm}^4,$$

$$W_{p1} = \frac{\pi D_1^3}{16} \left[1 - \left(\frac{d_1}{D_1} \right)^4 \right] = \frac{\pi \cdot 12^3}{16} \left[1 - \left(\frac{8}{12} \right)^4 \right] = 272,27 \text{ cm}^3,$$

$$I_{p2} = \frac{\pi d_2^4}{32} = \frac{\pi \cdot 9^4}{32} = 644,13 \text{ cm}^4, \quad W_{p2} = \frac{\pi d_2^3}{16} = \frac{\pi \cdot 9^3}{16} = 143,14 \text{ cm}^3.$$

1. Jednadžba ravnoteže štapa, slika b):

$$\sum M_x = M_A + M_B - M_1 + M_2 = 0 \Rightarrow \text{slijedi: } M_A + M_B = M.$$

2. Uvjet deformacije štapa jest:

$$\alpha_B = 0 \Rightarrow -\frac{M_1 \cdot c}{G I_{p1}} + \frac{M_2 \cdot l_1}{G I_{p1}} + \left(\frac{M_B \cdot l_1}{G I_{p1}} + \frac{M_B \cdot l_2}{G I_{p2}} \right) = 0,$$

a nakon sređivanja slijedi: $M_B = -0,0735 M$, $M_A = 1,0735 M$.

Očigledno je kritični dio ① štapa te je dopušteni zakretni moment opterećenja štapa:

1) prema proračunu na čvrstoću:

$$\tau_{1\text{max}} = \frac{|T_1|}{W_{p1}} = \frac{1,0735 M}{W_{p1}} \leq \tau_{\text{dop}},$$

$$\text{odnosno: } M_{\text{dop}} \leq \frac{W_{p1} \cdot \tau_{\text{dop}}}{1,0735} = \frac{272,27 \cdot 60}{1,0735} = 15218 \text{ N}\cdot\text{m},$$

2) prema **proračunu na krutost**:

$$\vartheta_1 = \frac{|T_1|}{GI_{p1}} = \frac{1,0735M}{GI_{p1}} \leq \vartheta_{\text{dop}},$$

$$\text{odnosno: } M_{\text{dop}} \leq \frac{GI_{p1} \cdot \vartheta_{\text{dop}}}{1,0735} = \frac{8 \cdot 10^{10} \cdot 1633,63 \cdot 10^{-8} \cdot 0,25 \cdot \pi}{1,0735 \cdot 180} = 5312 \text{ N}\cdot\text{m}.$$

Za određivanje nosivosti štapa mjerodavna je manja od ovih dviju vrijednosti, tj. **dopušteni zakretni moment opterećenja štapa na uvijanje jest**:

$$M_{\text{dop}} \leq 5312 \text{ N}\cdot\text{m}.$$

b) Kontrola štapa na čvrstoću i krutost

Za zadani zakretni moment $M = 5000 \text{ N}\cdot\text{m}$, zakretni momenti kojima su opterećeni dijelovi ① i ② štapa su:

$$M_1 = 2M = 2 \cdot 5000 = 10000 \text{ N}\cdot\text{m},$$

$$M_2 = M = 5000 \text{ N}\cdot\text{m}.$$

Reaktivni momenti na mjestima uklještenja A i B štapa su:

$$M_A = 1,0735M = 1,0735 \cdot 5000 = 5367,42 \text{ N}\cdot\text{m},$$

$$M_B = -0,0735M = -0,0735 \cdot 5000 = -367,42 \text{ N}\cdot\text{m}.$$

Momenti uvijanja u presjecima 1, 2 i 3 štapa, slike b) i c), su:

$$T_1 = -M_A = -5367,42 \text{ N}\cdot\text{m},$$

$$T_2 = -M_A + M_1 = 4632,6 \text{ N}\cdot\text{m},$$

$$T_3 = M_B = -367,42 \text{ N}\cdot\text{m}.$$

Pripadajući dijagram momenata uvijanja $T(x)$ duž štapa prikazan je na slici c).

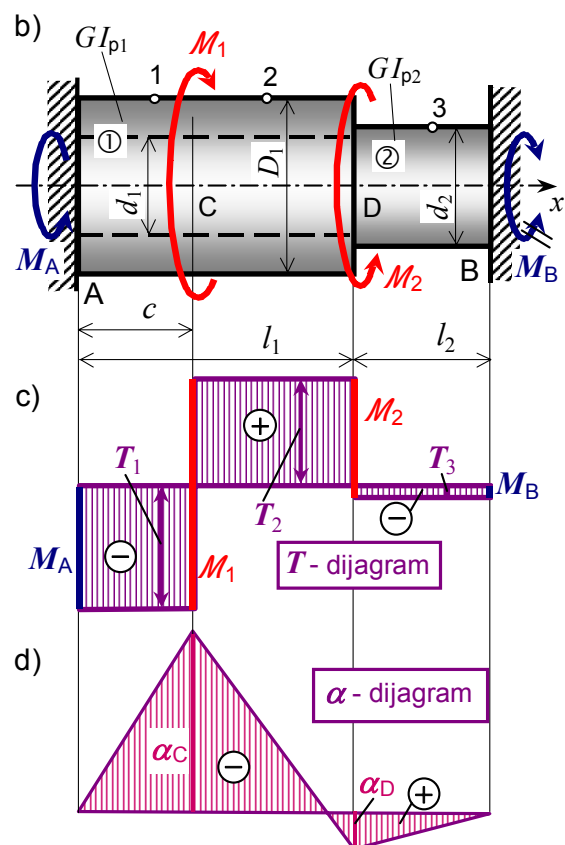
1) **Proračun čvrstoće** u zadanim presjecima štapa:

$$\tau_{1\text{max}} = \frac{|T_1|}{W_{p1}} = \frac{5367,42}{272,27} = 19,71 \text{ MPa} < \tau_{\text{dop}},$$

$$\tau_{2\text{max}} = \frac{|T_2|}{W_{p1}} = \frac{4632,6}{272,27} = 17,01 \text{ MPa} < \tau_{\text{dop}},$$

$$\tau_{3\text{max}} = \frac{|T_3|}{W_{p2}} = \frac{367,42}{143,14} = 2,57 \text{ MPa} < \tau_{\text{dop}}.$$

Čvrstoća štapa kod opterećenja na uvijanje je zadovoljavajuća.



2) **Proračun krutosti** dijelova štapa, tj. relativni kutovi uvijanja dijelova štapa su:

$$\vartheta_1 = \frac{|T_1|}{GI_{p1}} = \frac{5367,42}{8 \cdot 10^{10} \cdot 1633,63 \cdot 10^{-8}} \cdot \frac{180}{\pi} = 0,2353 \text{ } ^\circ/\text{m} < \vartheta_{\text{dop}},$$

$$\vartheta_2 = \frac{|T_2|}{GI_{p1}} = \frac{4632,6}{8 \cdot 10^{10} \cdot 1633,63 \cdot 10^{-8}} \cdot \frac{180}{\pi} = 0,2031 \text{ } ^\circ/\text{m} < \vartheta_{\text{dop}},$$

$$\vartheta_3 = \frac{|T_3|}{GI_{p2}} = \frac{367,42}{8 \cdot 10^{10} \cdot 644,13 \cdot 10^{-8}} \cdot \frac{180}{\pi} = 0,0409 \text{ } ^\circ/\text{m} < \vartheta_{\text{dop}}.$$

Krutost svih dijelova štapa kod opterećenja na uvijanje je zadovoljavajuća.

3) **Kutovi zakreta presjeka** štapa kod uvijanja, pri čemu je pozitivni kut zakreta suprotnog smjera od gibanja kazaljke na satu:

$$\alpha_C = -\vartheta_1 \cdot c = -0,2353 \cdot 0,5 = -0,1177^\circ,$$

$$\alpha_D = \vartheta_3 \cdot l_2 = 0,0409 \cdot 0,6 = 0,0245^\circ.$$

Pripadajući dijagram kutova zakreta $\alpha(x)$ presjeka duž štapa kod opterećenja na uvijanje, prikazan je na slici d).