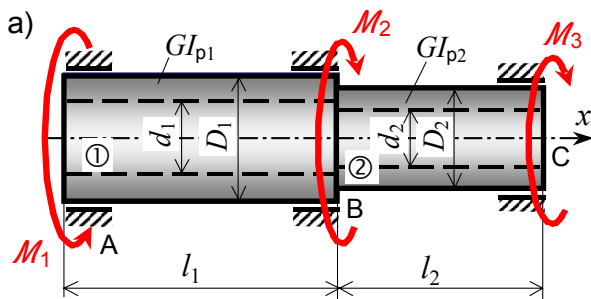


1. Primjer: Uvijanje ravnog štapa okruglog presjeka

(Zadatak 6. primjer A) na 11. str. "Vježbenica ispitnih zadataka", primjenom na PC modula "Torzija.exe" paketa programa "CVRSTOCA").

Za ravni čelični štap opterećen na uvijanje, slika a), treba odrediti:



a) potrebne standardne dimenzije poprečnog presjeka, ako je zadano:

$$l_1 = 0,6 \text{ m}, l_2 = 0,45 \text{ m}, k_1 = 0,65, k_2 = 0,6, \\ M_1 = 2,6 \text{ kN}\cdot\text{m}, M_3 = 1,04 \text{ kN}\cdot\text{m}, G = 80 \text{ GPa}, \\ \tau_{\text{dop}} = 75 \text{ MPa}, \vartheta_{\text{dop}} = 0,25 \text{ }^\circ/\text{m}.$$

b) Provjeriti čvrstoću i krutost dijelova štapa te odrediti kutove uvijanja presjeka B i C u odnosu na presjek A.

c) Skicirati dijagrame momenata uvijanja $T(x)$ i kutova zakreta $\alpha(x)$ presjeka duž štapa.

Rješenje:

a) Potrebne standardne dimenzije dijelova štapa

1. Jednadžba ravnoteže štapa:

$$\sum M_x = M_1 - M_2 - M_3 = 0,$$

slijedi: $M_2 = M_1 - M_3 = 2,6 - 1,04 = 1,56 \text{ kN}\cdot\text{m} = 1560 \text{ N}\cdot\text{m}$.

Momenti uvijanja u dijelovima štapa ① i ② su:

$$T_1 = -M_1 = -2600 \text{ N}\cdot\text{m},$$

$$T_2 = -M_3 = -1040 \text{ N}\cdot\text{m}.$$

Pripadajući dijagram momenata uvijanja $T(x)$ duž štapa prikazan je na slici b).

Potrebni standardni promjeri poprečnog presjeka štapa:

1) prema proračunu na čvrstoću:

$$W_{p1} \geq \frac{|T_1|}{\tau_{\text{dop}}},$$

gdje je polarni modul (polarni moment otpora) površine poprečnog presjeka štapa:

$$W_{p1} = \frac{\pi D_1^3}{16} (1 - k_1^4), \text{ uz omjer promjera presjeka: } k_1 = \frac{d_1}{D_1},$$

$$\text{slijedi: } D_1 \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot |T_1|}{\pi(1 - k_1^4) \cdot \tau_{\text{dop}}}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 2600}{\pi(1 - 0,65^4) \cdot 75}} = 5,99 \text{ cm},$$

$$\text{odnosno: } W_{p2} \geq \frac{|T_2|}{\tau_{\text{dop}}}, \text{ gdje je: } W_{p2} = \frac{\pi D_2^3}{16} (1 - k_2^4), \text{ uz } k_2 = \frac{d_2}{D_2},$$

$$\text{slijedi: } D_2 \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot |T_2|}{\pi(1 - k_2^4) \cdot \tau_{\text{dop}}}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1040}{\pi(1 - 0,6^4) \cdot 75}} = 4,33 \text{ cm}.$$

2) prema **proračunu na krutost**:

$$I_{p1} \geq \frac{|T_1|}{G \cdot \vartheta_{\text{dop}}},$$

gdje je drugi polarni moment površine poprečnog presjeka štapa: $I_{p1} = \frac{\pi D_1^4}{32} (1 - k_1^4)$,

$$\text{slijedi: } D_1 \geq \sqrt[4]{\frac{32 |T_1|}{\pi \cdot G \cdot (1 - k_1^4) \cdot \vartheta_{\text{dop}}}} = \sqrt[4]{\frac{576 \cdot 2600}{\pi^2 \cdot 80 \cdot (1 - 0,65^4) \cdot 0,25}} = 9,8 \text{ cm},$$

odnosno: $I_{p2} \geq \frac{|T_2|}{G \cdot \vartheta_{\text{dop}}}$, gdje je: $I_{p2} = \frac{\pi D_2^4}{32} (1 - k_2^4)$,

$$\text{slijedi: } D_2 \geq \sqrt[4]{\frac{32 |T_2|}{\pi \cdot G \cdot (1 - k_2^4) \cdot \vartheta_{\text{dop}}}} = \sqrt[4]{\frac{576 \cdot 1040}{\pi^2 \cdot 80 \cdot (1 - 0,6^4) \cdot 0,25}} = 7,68 \text{ cm}.$$

Mjerodavan je proračun štapa na krutost, te se usvajaju standardni promjeri štapa:

$$D_1 = 100 \text{ mm} \quad \text{i} \quad D_2 = 80 \text{ mm}.$$

b) Kontrola štapa na čvrstoću i krutost

Geometrijske značajke površina poprečnog presjeka dijelova ① i ② štapa su:

$$I_{p1} = \frac{\pi D_1^4}{32} [1 - k_1^4] = \frac{\pi \cdot 10^4}{32} [1 - 0,65^4] = 806,5 \text{ cm}^4,$$

$$W_{p1} = \frac{\pi D_1^3}{16} [1 - k_1^4] = \frac{\pi \cdot 10^3}{16} [1 - 0,65^4] = 161,3 \text{ cm}^3,$$

$$I_{p2} = \frac{\pi D_2^4}{32} [1 - k_2^4] = \frac{\pi \cdot 8^4}{32} [1 - 0,6^4] = 350 \text{ cm}^4,$$

$$W_{p2} = \frac{\pi D_2^3}{16} [1 - k_2^4] = \frac{\pi \cdot 8^3}{16} [1 - 0,6^4] = 87,5 \text{ cm}^3,$$

1) **Kontrola čvrstoće** dijelova štapa:

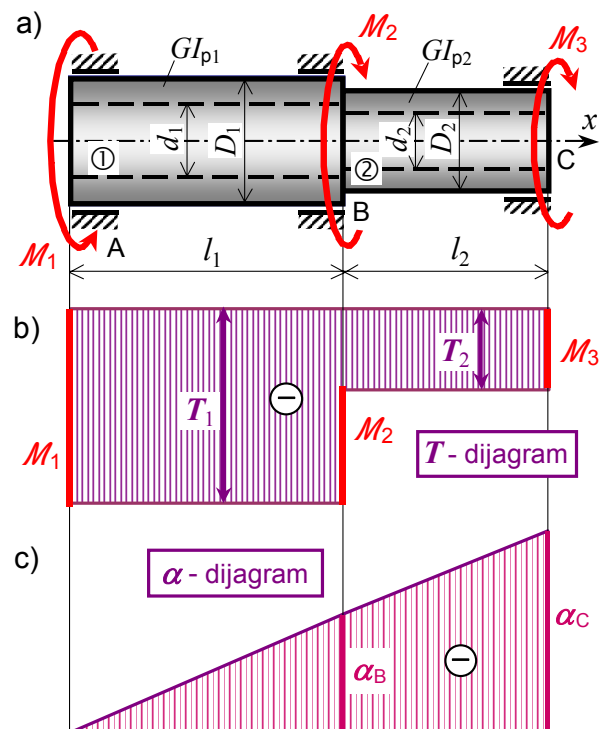
$$\tau_{1\text{max}} = \frac{|T_1|}{W_{p1}} = \frac{2600}{161,3} = 16,12 \text{ MPa} < \tau_{\text{dop}},$$

$$\tau_{2\text{max}} = \frac{|T_2|}{W_{p2}} = \frac{1040}{87,5} = 11,9 \text{ MPa} < \tau_{\text{dop}}.$$

Čvrstoća svih dijelova štapa kod opterećenja na uvijanje je zadovoljavajuća.

2) **Proračun krutosti** dijelova štapa, tj. relativni kutovi uvijanja dijelova ① i ② štapa su:

$$\vartheta_1 = \frac{|T_1|}{GI_{p1}} = \frac{2600}{8 \cdot 10^{10} \cdot 806,5 \cdot 10^{-8}} \cdot \frac{180}{\pi} = 0,231 \text{ }^\circ/\text{m} < \vartheta_{\text{dop}},$$



$$\vartheta_2 = \frac{|T_2|}{GI_{p2}} = \frac{1040}{8 \cdot 10^{10} \cdot 350 \cdot 10^{-8}} \cdot \frac{180}{\pi} = 0,213 \text{ } ^\circ/\text{m} < \vartheta_{\text{dop}}.$$

Krutost svih dijelova štapa kod opterećenja na uvijanje je zadovoljavajuća.

3) **Kutovi zakreta presjeka B i C štapa** u odnosu na presjek A (uzima se $\alpha_A = 0$) kod uvijanja, pri čemu je pozitivni kut zakreta suprotnog smjera od gibanja kazaljke na satu:

$$\alpha_B = -\vartheta_1 \cdot l_1 = -0,231 \cdot 0,6 = -0,1385^\circ,$$

$$\alpha_C = \alpha_B - \vartheta_1 \cdot a = -0,1385 - 0,213 \cdot 0,45 = -0,2343^\circ.$$

Pripadajući dijagram kutova zakreta presjeka $\alpha(x)$ duž štapa kod opterećenja na uvijanje, prikazan je na slici c).