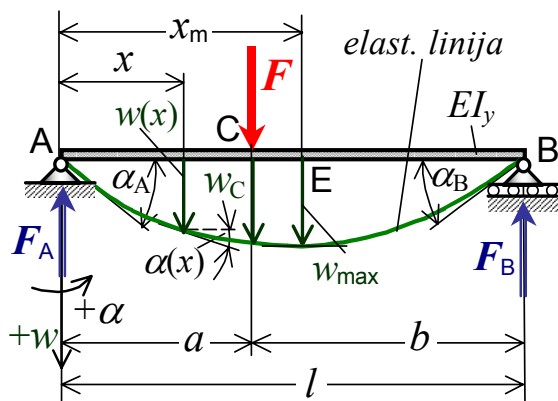


3. Primjer: Nosač na dva oslonca opterećen koncentriranom silom F

Za ravni nosač AB zadan i opterećen prema slici treba:



- integriranjem diferencijalne jednadžbe elastične linije odrediti jednadžbe progiba i kuta nagiba tangente na elastičnu liniju nosača,
- izračunati deformacije nosača u zadanim točkama,
- skicirati i kotirati elastičnu liniju opterećenog nosača.

Zadano: F , l , a , $EI_y = \text{konst.}$,
 $(a < l/2, b = l - a)$.

Rješenje:

Iz jednadžbi ravnoteže slijede iznosi reakcija u osloncima nosača:

$$F_A = F \frac{b}{l}, \quad F_B = F \frac{a}{l}.$$

Momenti savijanja u presjecima nosača su:

- za $0 \leq x \leq a$: $M_b(x) = F_A \cdot x = F \frac{b}{l} x$,
- za $a \leq x \leq l$: $M_b(x) = F_B \cdot (l - x) = F \cdot a - F \frac{a}{l} x$.

Nakon uvrštenja u diferencijalne jednadžbe elastične linije i integriranja slijedi:

- Za dio AC ($0 \leq x \leq a$):

$$EI_y \cdot \frac{d^2 w}{dx^2} = -M_b(x) = -F \frac{b}{l} \cdot x \quad / \int$$

$$EI_y \frac{dw}{dx} = -F \frac{b}{l} \frac{x^2}{2} + C_1 \quad / \int \quad (a)$$

$$EI_y \cdot w = -F \frac{b}{l} \frac{x^3}{6} + C_1 \cdot x + C_2 \quad (b)$$

- Za dio CB ($a \leq x \leq l$):

$$EI_y \cdot \frac{d^2 w}{dx^2} = -M_b(x) = -F \cdot a + F \frac{a}{l} \cdot x \quad / \int$$

$$EI_y \frac{dw}{dx} = -F a \cdot x + F \frac{a}{l} \frac{x^2}{2} + C_3 \quad / \int \quad (c)$$

$$EI_y \cdot w = -F a \cdot \frac{x^2}{2} + F \frac{a}{l} \frac{x^3}{6} + C_3 \cdot x + C_4 \quad (d)$$

Konstante integracije određuju se iz **rubnih uvjeta** učvršćenja nosača:

- Za $x = 0$ je progib $w = 0$ te iz (b) slijedi: $C_2 = 0$.
- Za $x = l$ je progib $w = 0$ te iz (d) slijedi izraz:

$$-F \frac{al^2}{2} + F \frac{al^2}{6} + C_3 \cdot l + C_4 = 0,$$

3. Za $x = a$ vrijedi jednakost izraza (a)=(c) te slijedi:

$$-F \frac{b a^2}{l} + C_1 = -F \cdot a^2 + F \frac{a^3}{2l} + C_3,$$

4. Za $x = a$ vrijedi jednakost izraza (b)=(d) te slijedi:

$$-F \frac{b a^3}{l} + C_1 \cdot a = -F \frac{a^3}{2} + F \frac{a^4}{6l} + C_3 \cdot a + C_4.$$

Sređivanjem izraza konstante integracije su:

$$C_1 = \frac{F b}{6l} (l^2 - b^2), \quad C_3 = \frac{F a}{6l} (2l^2 + a^2), \quad C_4 = -\frac{F a^3}{6}.$$

Sređivanjem izraza (a) i (c) slijede **jednadžbe kuta nagiba tangente** na elastičnu liniju nosača:

1. za dio AC: $0 \leq x \leq a$:

$$\alpha(x) = -\frac{F l^2}{6EI_y} \left\{ \frac{b}{l} \left[1 - \left(\frac{b}{l} \right)^2 - 3 \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right] \right\},$$

2. za dio CB: $a \leq x \leq l$:

$$\alpha(x) = -\frac{F l a}{6EI_y} \left[2 + \left(\frac{a}{l} \right)^2 - 6 \left(\frac{x}{l} \right) + 3 \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right].$$

Sređivanjem izraza (b) i (d) slijede **jednadžbe elastične linije** nosača (progibna linija):

1. za dio AC: $0 \leq x \leq a$:

$$w(x) = \frac{F l^3}{6EI_y} \left\{ \frac{b x}{l^2} \left[1 - \left(\frac{b}{l} \right)^2 - \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right] \right\},$$

2. za dio CB: $a \leq x \leq l$:

$$w(x) = \frac{F l^3}{6EI_y} \left\{ \frac{b x}{l^2} \left[1 - \left(\frac{b}{l} \right)^2 - \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right] + \left(\frac{x-a}{l} \right)^3 \right\}$$

Maksimalni progib nosača je na mjestu $x = x_m$:

a) U primjeru kad je $a > b$:

$$x_m = \sqrt{\frac{l^2 - b^2}{3}}, \quad w_{\max} = \frac{F b \sqrt{(l^2 - b^2)^3}}{9\sqrt{3} EI_y l},$$

b) U primjeru kad je $a < b$:

$$x_m = l - \sqrt{\frac{l^2 - a^2}{3}}, \quad w_{\max} = \frac{F a \sqrt{(l^2 - a^2)^3}}{9\sqrt{3} EI_y l}.$$

Maksimalni kutovi nagiba tangente na elastičnu liniju su na mjestima oslonaca A i B nosača:

$$\alpha_A = -\frac{F a b}{6 E I_y l} (l + b), \quad \alpha_B = \frac{F a b}{6 E I_y l} (l + a).$$

U primjeru simetričnog opterećenja nosača je $a = b = l/2$, te su izrazi za maksimalne kutove nagiba tangente na elastičnu liniju i maksimalni progib nosača:

$$\alpha_A = -\alpha_B = -\frac{F l^2}{16 E I_y}, \quad w_{\max} = w_E = \frac{F l^3}{48 E I_y}.$$