

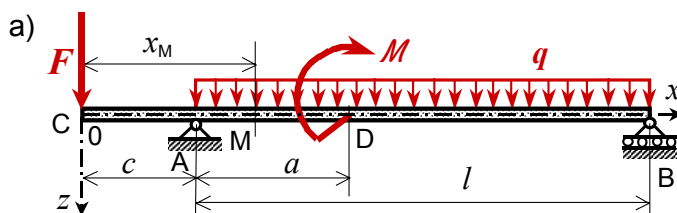
## 1. Primjer: Proračun čvrstoće ravnog nosača i komponenti naprezanja u poprečnom presjeku nosača

Za ravni nosač AB zadan i opterećen prema slici a) treba:

- provjeriti čvrstoću za zadano opterećenje nosača i presjek nosača prema slici b),
- nacrtati dijagrame poprečnih sila i momenata savijanja duž nosača,
- u presjeku  $x = 1,5$  m nosača skicirati dijagrame raspodjele normalnih i posmičnih naprezanja po visini poprečnog presjeka,
- u točki M ( $x_M, z_M$ ) nosača odrediti iznose normalnog i posmičnog naprezanja, izračunati glavna naprezanja te skicirati Mohrovu kružnicu naprezanja.

### Rješenje:

(Uporabom modula "Savij1\_N.exe" paketa programa "CVRSTOCA" proveden je na PC proračun čvrstoće za zadani nosač, 7. zadatak, primjer N1) i poprečni presjek D).



### Zadano:

$$l = 6 \text{ m}, a = 2 \text{ m}, c = 1,5 \text{ m},$$

$$\sigma_{\text{dop}} = 120 \text{ MPa}, \tau_{\text{dop}} = 80 \text{ MPa},$$

$$F = 15 \text{ kN}, q = 5 \text{ kN/m}, M = 15 \text{ kN}\cdot\text{m},$$

$$b_1 = 12 \text{ cm}, b_2 = 3 \text{ cm}, h = 18 \text{ cm},$$

$$t = 4 \text{ cm},$$

$$M(x_M = 2 \text{ m}, z_M = 5 \text{ cm}).$$

### 1. Geometrijske značajke poprečnog presjeka nosača, slika b):

a) Težište poprečnog presjeka:

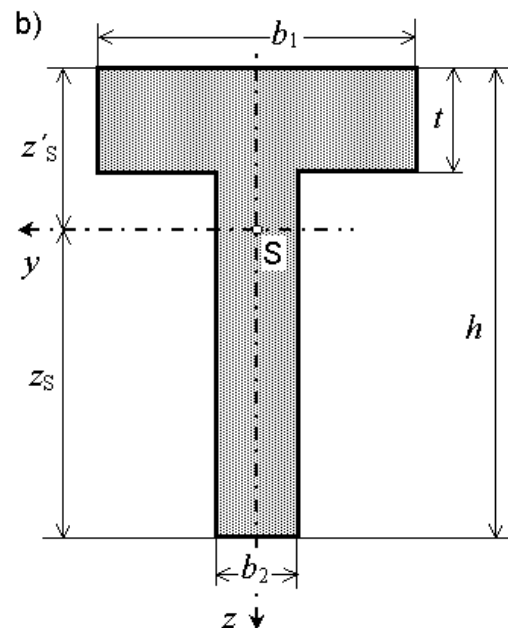
$$z_S = \frac{\sum A_i \cdot z_{Si}}{A} = 11,8 \text{ cm}, z'_S = h - z_S = 6,2 \text{ cm},$$

$$A = (b_1 - b_2)t + h \cdot b_2 = 90 \text{ cm}^2.$$

b) Drugi aksijalni moment površine poprečnog presjeka (težišni moment tromosti):

$$I_{y'} = \frac{(b_1 - b_2) \cdot t^3}{3} + \frac{b_2 \cdot h^3}{3} = 6024 \text{ cm}^4,$$

$$I_y = I_{y'} - A \cdot (z'_S)^2 = 6024 - 90 \cdot 6,2^2 = 2564,4 \text{ cm}^4.$$



### A) Proračun čvrstoće nosača

#### 2. Reakcije u osloncima A i B nosača, slika c):

$$1. \sum F_z = F - F_A - F_B + q \cdot l = 0,$$

$$2. \sum M_A = -M - q \frac{l^2}{2} + F_B \cdot l + F \cdot c = 0.$$

Uvrštenjem zadanih vrijednosti opterećenja slijede iznosi reakcija u osloncima nosača:

$$F_A = 31,25 \text{ kN}, F_B = 13,75 \text{ kN}.$$

Dijagram poprečnih sila nosača ( $Q$  – dijagram) prikazan je na slici c).

### 3. Momenti savijanja u karakterističnim presjecima nosača:

$$M_A = -F \cdot c = -22,5 \text{ kN}\cdot\text{m},$$

$$M_{D,L} = -F \cdot (c+a) + F_A \cdot a - q \frac{a^2}{2} = 0,$$

$$M_{D,D} = M_{D,L} + M = 15 \text{ kN}\cdot\text{m}.$$

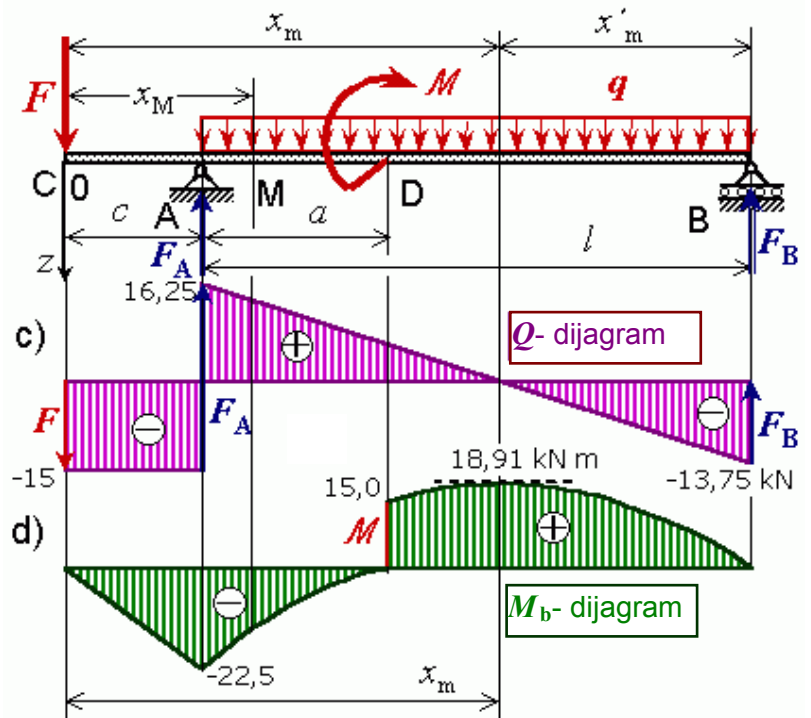
Mjesto ekstremne vrijednosti momenta savijanja između oslonaca A i B jest:

$$Q(x_m) = 0 \Rightarrow F_B - q \cdot x'_m = 0,$$

$$x'_m = \frac{F_B}{q} = 2,75 \text{ m}.$$

Slijedi ekstremna vrijednost momenta savijanja:

$$M_b(x_m) = F_B \cdot x'_m - q \frac{x'^2_m}{2} \approx 18,91 \text{ kN}\cdot\text{m}.$$



Dijagram momenata savijanja  $M_b$  – dijagram duž nosača prikazan je na slici d).

### 4. Maksimalna naprezanja u presjeku nosača

Kritični presjek nosača je na mjestu oslonca A s desne strane tj. u presjeku  $x = 1,5 \text{ m}$ , gdje su maksimalni iznosi momenta savijanja i poprečne sile:

$$M_{b \max} = -22500 \text{ N}\cdot\text{m}, \quad Q_{\max} = 16,25 \text{ kN}.$$

Ekstremne vrijednosti normalnog naprezanja u presjeku nosača su:

$$\sigma_{x \max} = \frac{M_{b \max}}{I_y} \cdot z'_S = \frac{-22500}{2564,4} \cdot (-6,2) = 54,4 \text{ MPa},$$

$$\sigma_{x \min} = \frac{M_{b \max}}{I_y} \cdot z_S = \frac{-22500}{2564,4} \cdot 11,8 = -103,53 \text{ MPa}.$$

Čvrstoća nosača zadovoljava, jer je:  $|\sigma_{x \min}| < \sigma_{\text{dop}}$ .

Maksimalna vrijednost posmičnog naprezanja u presjeku nosača jest:

$$\tau_{xz \max} = \frac{Q_{\max} \cdot S_{y \max}}{I_y \cdot b_2} = \frac{16,25 \cdot 208,86}{2564,4 \cdot 3} \cdot 10 = 4,41 \text{ MPa},$$

gdje je statički moment površine presjeka obzirom na težišnu os  $y$ :

$$S_{y \max} = \frac{b_2 \cdot z_S^2}{2} = \frac{3 \cdot 11,8^2}{2} = 208,86 \text{ cm}^3.$$

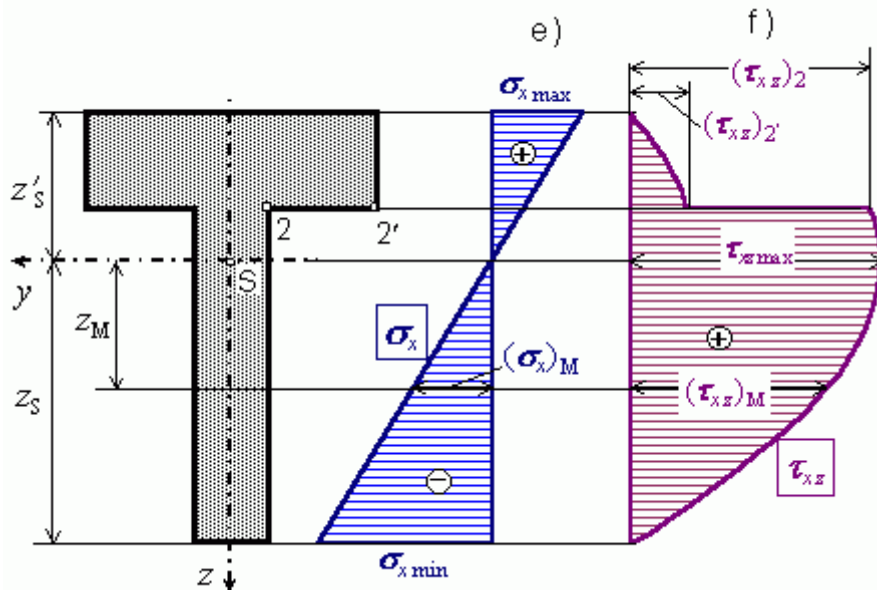
Posmična napreznja na mjestu prijelaza rebra i pojasnika presjeka su:

$$(\tau_{xz})_2 = \frac{Q_{\max} \cdot (S_y)_2}{I_y \cdot b_2} = \frac{16,25 \cdot 201,6}{2564,4 \cdot 3} \cdot 10 = 4,26 \text{ MPa},$$

gdje je:  $(S_y)_2 = b_1 \cdot t \cdot (z_S' - \frac{t}{2}) = 12 \cdot 4 \cdot (6,2 - 2) = 201,6 \text{ cm}^3,$

a iz omjera širina presjeka slijedi posmično napreznje:  $(\tau_{xz})_2' = (\tau_{xz})_2 \cdot \frac{b_2}{b_1} = 1,06 \text{ MPa}.$

Dijagrami raspodjele normalnih i posmičnih napreznja po visini poprečnog presjeka nosača na mjestu  $x = 1,5 \text{ m}$ , prikazani su na slikama e) i f).



## B) Proračun napreznja u točki M( $x_M, z_M$ ) nosača

Iznosi momenta savijanja i poprečne sile u presjeku  $x_M = 2 \text{ m}$  nosača su:

$$M_b(x_M) = -F \cdot x_M + F_A \cdot (x_M - c) - q \frac{(x_M - c)^2}{2} = -15 \text{ kN} \cdot \text{m},$$

$$Q(x_M) = -F + F_A - q \cdot (x_M - c) = 13,75 \text{ kN}.$$

Normalno i posmično napreznje u točki M nosača su:

$$(\sigma_x)_M = \frac{M_b(x_M)}{I_y} \cdot z_M = \frac{-15000}{2564,4} \cdot 5 = -29,25 \text{ MPa},$$

$$(\tau_{xz})_M = \frac{Q(x_M) \cdot S_y(z_M)}{I_y \cdot b_2} = \frac{13,75 \cdot 171,36}{2564,4 \cdot 3} \cdot 10 = 3,06 \text{ MPa},$$

gdje je statički moment površine presjeka ispod  $z_M$  do ruba površine presjeka nosača:

$$S_y(z_M) = \frac{b_2}{2} \cdot (z_S^2 - z_M^2) = 171,36 \text{ cm}^3.$$

Glavna napreznja u točki M nosača su:

$$\sigma_{1,2} = \frac{(\sigma_x)_M}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{(\sigma_x)_M}{2}\right)^2 + (\tau_{xz})_M^2} = -14,623 \pm 14,941 \text{ MPa},$$

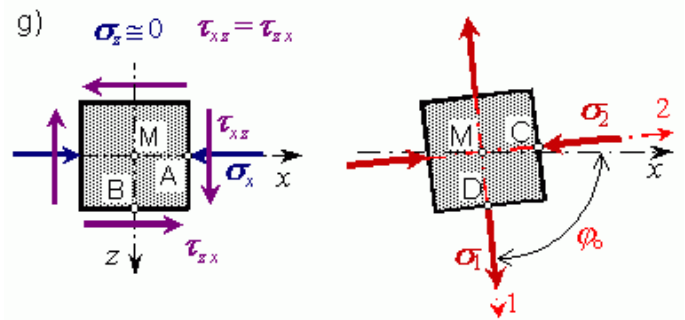
odnosno slijedi:  $\sigma_1 = 0,318 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_2 = -29,564 \text{ MPa}$ .

Glavni pravac naprezanja 1 određen je kutom  $\varphi_0$  mjereno od osi  $x$ :

$$\tan 2\varphi'_0 = -\frac{2(\tau_{xz})_M}{(\sigma_x)_M} = -\frac{2 \cdot 3,063}{-29,2466} = 0,20946,$$

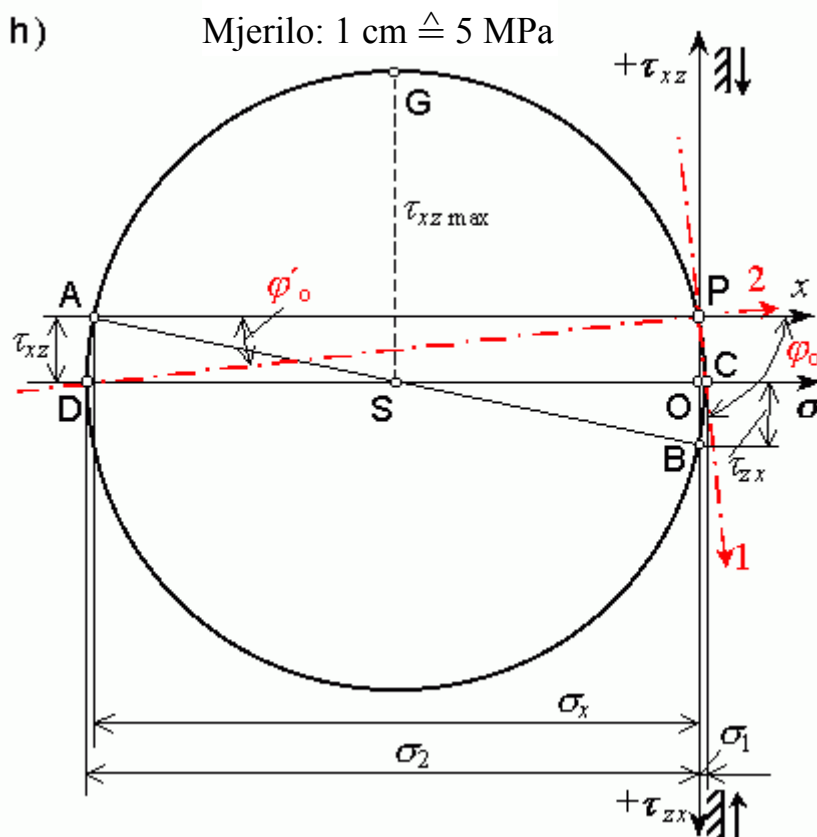
$$2\varphi'_0 = 11,83^\circ \Rightarrow \varphi'_0 \cong 5,9^\circ \text{ od osi } z,$$

$$\varphi_0 = \varphi'_0 - 90^\circ = -84,1^\circ \text{ mjereno od osi } x.$$



Naprezanja na elementu u točki M nosača prikazana su na slici g), u  $(x, z)$ - i  $(1, 2)$ - koordinatnim sustavima.

Grafičko rješenje za glavna naprezanja u točki M može se odrediti crtanjem Mohrove kružnice naprezanja, slika h).



**NAPOMENA:** U "Vježbenica ispitnih zadataka" na str. 12 i 13, zadano je 10 zadataka i 9 različitih poprečnih presjeka, za vježbanje rješavanja čvrstoće ravnih nosača, kao i za određivanje vrijednosti normalnih i posmičnih naprezanja u zadanom presjeku nosača. Za dobivanje numeričkih vrijednosti zadatka može se koristiti modul "Savij1\_N.exe" paketa programa "CVRSTOCA".

Za crtanje grafičkih prikaza dijagrama poprečnih sila, momenata savijanja, raspodjele normalnih i posmičnih naprezanja po visini poprečnog presjeka ravnih nosača može se koristiti program "MDSolids®", tako da se zadaju numeričke vrijednosti za zadane veličine zadatka.