

Primjer 1. Ravninsko stanje naprezanja

U točki M tijela zadano je ravninsko stanje naprezanja u presjecima osi $(0xy)$ -koordinatnog sustava, prema slici a).

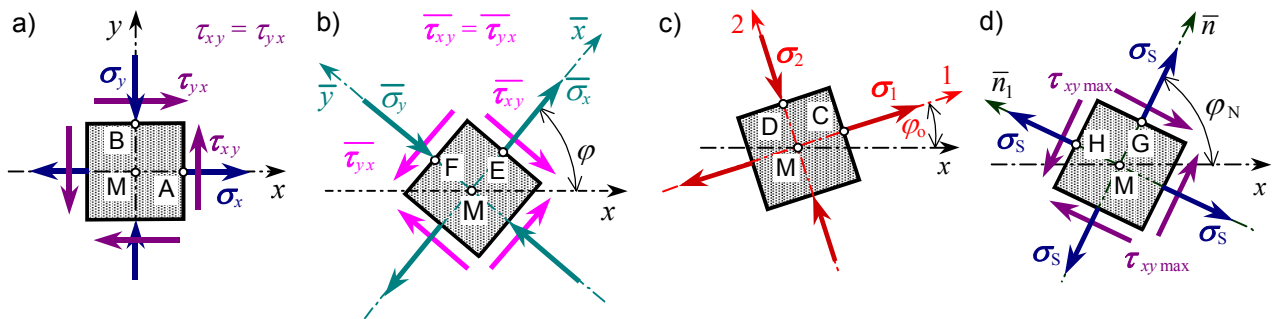
Treba odrediti analitički i grafički pomoću Mohrove kružnice naprezanja:

- normalna i posmična naprezanja u presjecima osi $(0\bar{x}\bar{y})$ -koordinatnog sustava koji je zakrenut za kut $\varphi = 50^\circ$ prema osi x ,
 - glavne pravce i glavna naprezanja,
 - maksimalno posmično naprezanje s pripadnim normalnim naprezanjima.
- Skicirati orijentirane elemente u točki M tijela s ucrtanim komponentama naprezanja u svim zadanim koordinatnim sustavima.

Zadano: $\sigma_x = 100 \text{ MPa}$, $\sigma_y = -60 \text{ MPa}$, $\tau_{xy} = 60 \text{ MPa}$.

Rješenje:

Na slici elementa označeni su presjeci A i B sa zadanim pripadnim naprezanjima (slika a).



1. Analitičko rješenje

a) Vrijednosti komponenti naprezanja u točki M elementa u presjecima E i F u osima zarotiranog $(0\bar{x}\bar{y})$ -koordinatnog sustava (slika b):

$$\bar{\sigma}_x = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi,$$

$$\bar{\tau}_{xy} = \bar{\tau}_{yx} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi,$$

$$\bar{\sigma}_y = \sigma_x + \sigma_y - \bar{\sigma}_x.$$

Radi jednostavnijeg izračunavanja, prvo se odrede vrijednost srednjeg naprezanja σ_S (apscisa središta S Mohrove kružnice naprezanja) i polurazlika vrijednosti normalnih naprezanja, te iznosi odgovarajućih trigonometrijskih funkcija za zadani kut $\varphi = 50^\circ$:

$$\sigma_S = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{100 - 60}{2} = 20 \text{ MPa}, \quad \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} = \frac{100 + 60}{2} = 80 \text{ MPa},$$

$$\cos 2\varphi = \cos(100^\circ) = -0,17365, \quad \sin 2\varphi = \sin(100^\circ) = 0,98481.$$

Uvrštavanjem ovih vrijednosti dobivaju se iznosi naprezanja u presjecima E i F, (iznosi su naprezanja zaokruženi na dva decimalna mjesta):

$$\bar{\sigma}_x = 20 + 80 \cdot (-0,17365) + 60 \cdot 0,98481 = 65,20 \text{ MPa},$$

$$\bar{\tau}_{xy} = \bar{\tau}_{yx} = -80 \cdot 0,98481 + 60 \cdot (-0,17365) = -89,20 \text{ MPa},$$

$$\bar{\sigma}_y = 100 - 60 - 65,20 = -25,20 \text{ MPa}.$$

b) Vrijednosti glavnih napreznja u točki M tijela jesu:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 20 \pm \sqrt{80^2 + 60^2} = 20 \pm 100 \text{ MPa} .$$

$$\sigma_1 = 20 + 100 = 120 \text{ MPa} , \quad \sigma_2 = 20 - 100 = -80 \text{ MPa} .$$

Kut glavnog pravca 1 s osi x jest:

$$\tan 2\varphi_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{60}{80} = 0,75 ,$$

slijedi: $2\varphi_0 = 36,87^\circ$, odnosno iznos kuta $\varphi_0 = 18,435^\circ$.

Orijentirani element s ucrtanim glavnim napreznjima u točki M prikazan je na slici c).

Kut između osi \bar{x} i glavnog pravca 1 jest:

$$\psi = \varphi - \varphi_0 = 31,57^\circ .$$

c) Maksimalno posmično napreznje i pripadajuće normalno napreznje jesu:

$$\tau_{xy \max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 100 \text{ MPa} \quad \text{i} \quad \sigma_s = 20 \text{ MPa} .$$

Pravac normale \bar{n} presjeka u kojem je maksimalno posmično napreznje određen je kutom φ_N mjerenim od osi x :

$$\varphi_N = \varphi_0 + \pi/2 = 18,435^\circ + 45^\circ = 63,435^\circ .$$

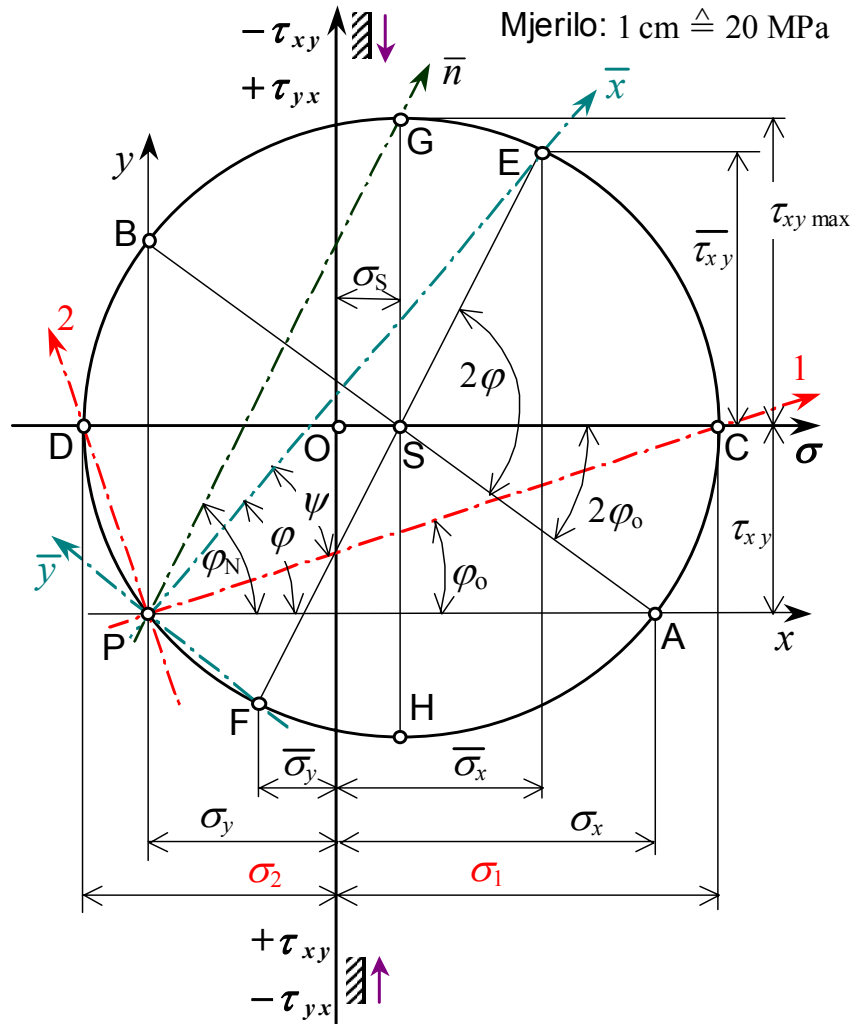
Orijentirani element s ucrtanim maksimalnim posmičnim napreznjima i pripadajućim normalnim napreznjima prikazan je na slici d).

2. Grafičko rješenje pomoću Mohrove kružnice napreznja

Postupak crtanja Mohrove kružnice napreznja na slici jest:

1. U $(0\sigma\tau)$ -koordinatnom sustavu u zadanom mjerilu crtaju se točke $A(\sigma_x, \tau_{xy})$ i $B(\sigma_y, \tau_{yx})$ koje predstavljaju zadane vrijednosti napreznja na presjecima A i B (slika a).
2. Sjecište spojnice \overline{AB} i koordinatne osi σ određuje središte S kružnice.
3. Iz središta S opiše se kružnica polumjera $R = \overline{AS} = \overline{SB}$.
4. Kružnica siječe koordinatnu os σ u točkama C i D, čime su određene vrijednosti glavnih napreznja u zadanom mjerilu $\sigma_1 = \overline{OC}$ i $\sigma_2 = \overline{OD}$. Uz definiciju $\sigma_1 > \sigma_2$, točka C (σ_1) je uvijek krajnja desna točka na osi σ , a točka D (σ_2) je uvijek krajnja lijeva točka na osi σ .
5. Paralela s osi x kroz točku A, odnosno s osi y kroz točku B, presijeca kružnicu u točki pola P.
6. Pravac PC definira kut φ_0 glavnog pravca 1, a pravac PD je glavni pravac 2 u točki M tijela (slika c).
7. Za određivanje iznosa komponenti napreznja u presjecima E i F u osima $(0\bar{x}\bar{y})$ -koordinatnog sustava zarotiranog za kut φ prema osnovnom $(0xy)$ -koordinatnom sustavu (slika b), povlače se iz pola P pravci paralelni s osima \bar{x} i \bar{y} čija presjecišta u točkama E i F kružnice određuju u mjerilu iznose napreznja $\bar{\sigma}_x$, $\bar{\tau}_{xy}$, odnosno $\bar{\sigma}_y$ i $\bar{\tau}_{yx}$.

8. Točke na okomici kroz središte S kružnice određuju točke G i H u kojima je maksimalno posmično naprezanje $\tau_{xy\max}$, a sva normalna naprezanja jednaka su srednjem normalnom naprezanju σ_S u točki M tijela (slika d). Pravac osi \bar{n} određen je kutom φ_N povlačenjem iz pola P pravca PG kroz točku G, a osi \bar{n}_1 pravcem PH kroz točku H kružnice.



Svi orijentirani elementi u točki M tijela s ucrtanim komponentama naprezanja na presjecima u zadanim koordinatnim sustavima prikazani su na slikama a) do d).

Napomena za rješavanje ovog zadatka na osobnom računalu:

- analitička rješenja ovog primjera mogu se dobiti uporabom zadatka A) modula «Napr_def» programa «CVRSTOCA».
- grafičko rješenje može se jednostavno dobiti uporabom modula «Mohr's circle» programa «MDSolids®».