

2. Primjer: Hookeov zakon za ravninsko stanje napreznja tijela

(Zadatak 1. primjer E) na str. 6 u "Vježbenica ispitnih zadataka", primjenom na PC modula "Napr_def.exe" paketa programa "CVRSTOCA").

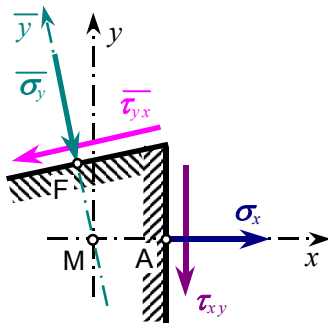
U točki M tijela zadano je ravninsko stanje napreznja u presjecima određenih s osi x i s osi \bar{y} , prema slici.

Treba odrediti grafički pomoću Mohrove kružnice napreznja:

- normalna i posmična napreznja u presjecima određenih s osi x i s osi \bar{x} , te odrediti kut φ između osi \bar{x} i osi x ,
- glavne pravce i glavna napreznja,
- maksimalno posmično napreznje s pripadajućim normalnim napreznjima i pravcima.

Skicirati orijentirane elemente u točki M tijela s ucrtanim komponentama napreznja u svim koordinatnim sustavima.

Pomoću izraza Hookeovog zakona odrediti komponente deformacije u svim analiziranim koordinatnim sustavima, te skicirati orijentirane elemente s naznačenim komponentama deformacije. Nacrtati Mohrovu kružnicu deformacija za stanje deformacije u točki M tijela.



Zadano: $\sigma_x = 120 \text{ MPa}$, $\tau_{xy} = -50 \text{ MPa}$, $\bar{\sigma}_y = -60 \text{ MPa}$,
 $\bar{\tau}_{yx} = -80 \text{ MPa}$, $E = 207 \text{ GPa}$, $\nu = 0,32$.

Na slici elementa označeni su presjeci A i F sa zadanim pripadajućim napreznjima.

Mjerilo za Mohrovu kružnicu napreznja: $1 \text{ cm} \triangleq 20 \text{ MPa}$.

Mjerilo za Mohrovu kružnicu deformacija: $1 \text{ cm} \triangleq 100 \times 10^{-6}$.

Rješenje:

1. **Analitička rješenja** mogu se izračunati pomoću PC uporabom modula «Napr_def.exe» paketa programa «CVRSTOCA», zadatak E). U ovom su primjeru dobiveni rezultati za napreznja, deformacije i kutove u analiziranim koordinatnim sustavima:

(oxy)-koord. sustav: $\sigma_y = -81,667 \text{ MPa}$, $\tau_{yx} = -50 \text{ MPa}$, slika a)

Deformacije su: $\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu \cdot \sigma_y) = 705,598 \times 10^{-6}$, $\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu \cdot \sigma_x) = -580,032 \times 10^{-6}$,

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\tau_{xy}}{G} = -637,681 \times 10^{-6} \text{ rad, slika a1)}$$

($ox\bar{y}$)- koord. sustav: $\bar{\sigma}_x = 98,333 \text{ MPa}$, $\bar{\tau}_{xy} = -80 \text{ MPa}$, $\varphi = 9,462^\circ$, slika b)

Deformacije su: $\bar{\varepsilon}_x = \frac{1}{E}(\bar{\sigma}_x - \nu \cdot \bar{\sigma}_y) = 567,794 \times 10^{-6}$, $\bar{\varepsilon}_y = \frac{1}{E}(\bar{\sigma}_y - \nu \cdot \bar{\sigma}_x) = -441,868 \times 10^{-6}$,

$$\bar{\gamma}_{xy} = \bar{\gamma}_{yx} = \frac{\bar{\tau}_{xy}}{G} = -1020,29 \times 10^{-6} \text{ rad, slika b1)}$$

($0\sigma_1\sigma_2$)- koord. sustav: $\sigma_1 = 131,716 \text{ MPa}$, $\sigma_2 = -93,383 \text{ MPa}$, $\varphi_0 = -13,188^\circ$, $\psi = -22,65^\circ$, slika c)

Glavne deformacije su: $\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu \cdot \sigma_2) = 780,669 \times 10^{-6}$,

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu \cdot \sigma_1) = -654,743 \times 10^{-6}, \text{ slika c1)}$$

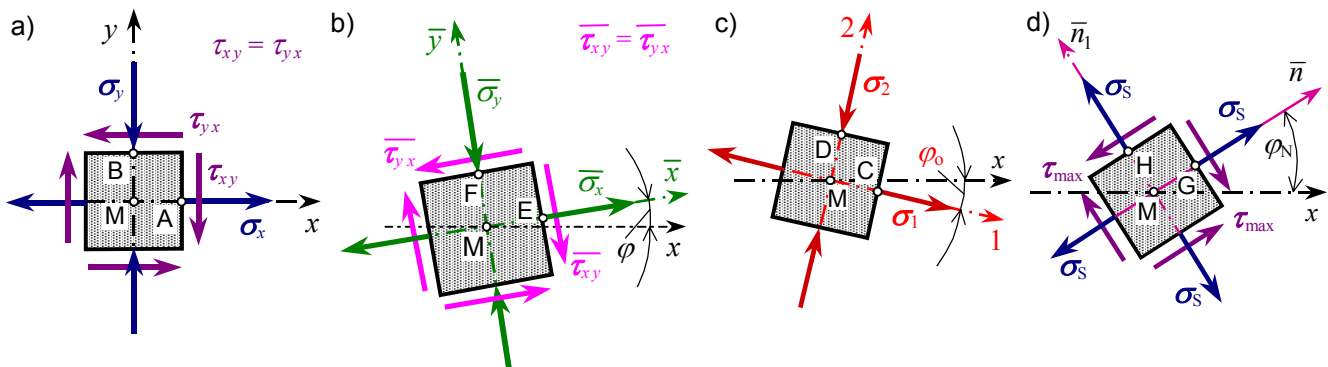
$(0\bar{n}\bar{n}_1)$ - koord. sustav: $\sigma_s = 19,167 \text{ MPa}$, $\tau_{\max} = 112,549 \text{ MPa}$, $\varphi_N = 31,812^\circ$, slika d)

Deformacije su: $\varepsilon_s = 62,963 \times 10^{-6}$, $\gamma_{xy\max} = 1435,412 \times 10^{-6} \text{ rad}$, slika d1).

Pri tom je rabljen izračunati modul smičnosti materijala tijela:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 78,409 \text{ GPa}.$$

Svi orijentirani elementi u točki M tijela s ucrtanim komponentama napreznjima na presjecima, u svim zadanim koordinatnim sustavima, prikazani su na slikama a) do d).

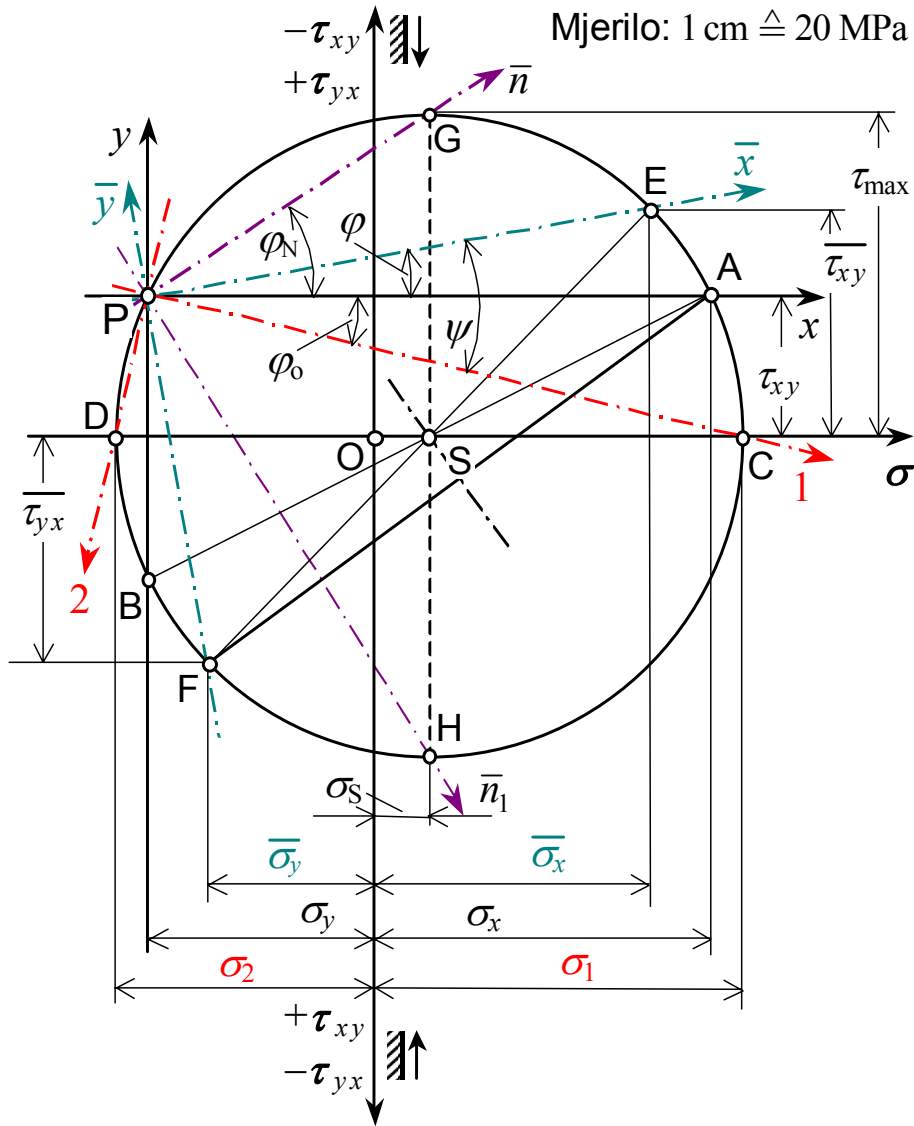


2. Grafičko rješenje za napreznja pomoću Mohrove kružnice napreznja

U $(0\sigma\tau)$ -koordinatnom sustavu u zadanom mjerilu crtaju se točke $A(120, -50)$ i $F(-60, -80)$ koje predstavljaju napreznja na presjecima A i F, slika.

- Odredi se simetrala spojnice \overline{AF} .
- Sjecište te simetrale i osi σ određuje središte S kružnice.
- Iz središta S opiše se kružnica polumjera $R = \overline{AS} = \overline{SF}$.
- Kružnica siječe os σ u točkama C i D, čime su određene vrijednosti glavnih napreznja u mjerilu $\sigma_1 = \overline{OC}$ i $\sigma_2 = \overline{OD}$.
- Paralela s osi x kroz točku A presijeca kružnicu u točki pola P Mohrove kružnice.
- Pravac PC definira kut φ_0 glavnog pravca 1 s osi x , a pravac PD je glavni pravac 2 u točki M tijela.
- Za određivanje napreznja u presjeku određenom s osi y , povlači se iz pola P paralela s osi y do presjecišta s kružnicom u točki B, a također produlji se spojnica \overline{AS} do presjecišta s kružnicom u točki B. Time su u mjerilu određeni iznosi napreznja σ_y i τ_{yx} .
- Pravac PF definira pravac osi \bar{y} u točki M tijela, a okomica na njega određuje pravac PE tj. os \bar{x} koja presijeca kružnicu u točki E. Također, produlji se spojnica \overline{FS} do presjecišta s kružnicom u točki E, te su time u mjerilu određeni iznosi napreznja $\bar{\sigma}_x$ i $\bar{\tau}_{xy}$. Pravac PE određuje kut φ koordinatne osi \bar{x} s osi x .
- Točke na okomici kroz središte S kružnice određuju točke G i H u kojima je maksimalno posmično napreznje τ_{\max} , a normalna napreznja jednaka su srednjem normalnom napreznju σ_s u točki M tijela.
- Pravac normale \bar{n} određen je kutom φ_N od osi x , povlačenjem pravca PG iz pola P.
- Orijentirani elementi s ucrtanim napreznjima na presjecima prikazani su na slikama a), b), c) i d).

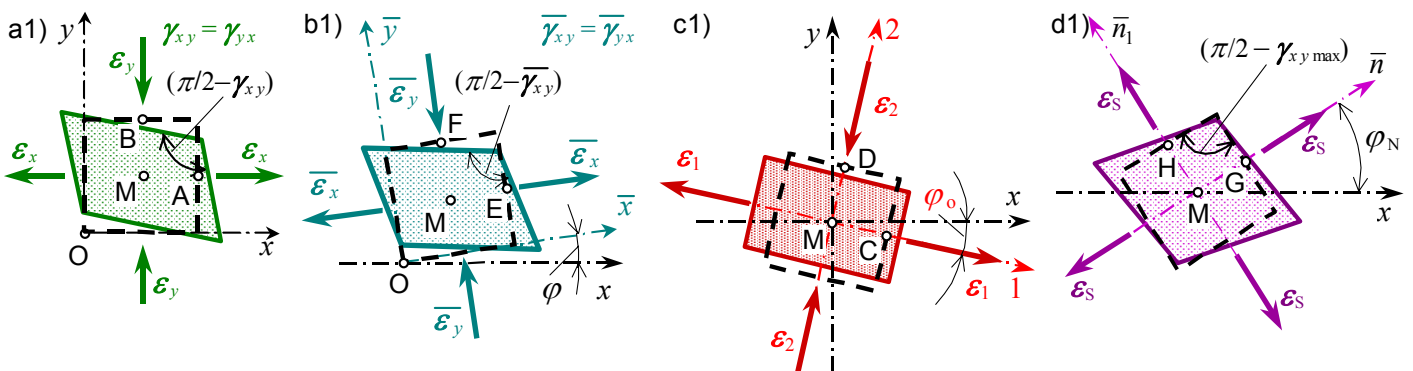
Napomena: Nakon izračunatih komponenti napreznja u $(0xy)$ - koordinatnom sustavu, može se grafičko rješenje dobiti uporabom modula «Mohr's circle» programa «MDSolids®».



3) **Grafičko određivanje komponenti deformacije** pomoću Mohrove kružnice deformacije

Mohrovu kružnicu deformacije u zadanom primjeru moguće je nacrtati kad je poznato stanje ravninske deformacije u $(0xy)$ - koordinatnom sustavu, tj. iz ranije danih izraza Hookeovog zakona izračunate su komponente deformacije ϵ_x , ϵ_y i $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$ koje se odnose na pravce x i y u točki M tijela, slika a1).

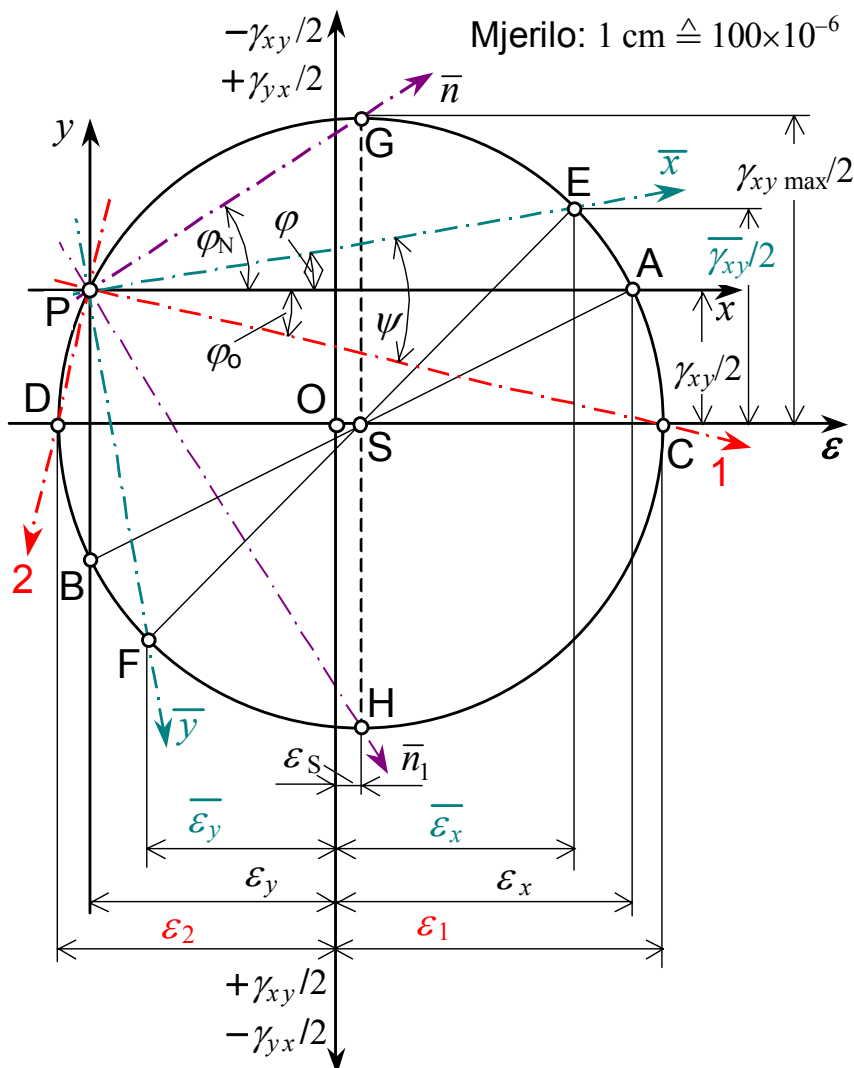
Svi orijentirani elementi u točki M tijela s ucrtanim komponentama deformacija u svim zadanim koordinatnim sustavima, prikazani su na slikama a1) do d1).



- U $\left(0, \varepsilon, \frac{1}{2}\gamma\right)$ -koordinatnom sustavu ucrtaju se točke $A(\varepsilon_x, \frac{1}{2}\gamma_{xy})$ i $B(\varepsilon_y, \frac{1}{2}\gamma_{yx})$ koje odgovaraju presjecima A i B, određenih osima x i y , te se konstruira kružnica koja prolazi točkama A i B, a njeno je središte S na osi ε . Središte $S(\varepsilon_s, 0)$ kružnice nalazi se u presjecištu osi ε i dužine \overline{AB} , slika. Apscise presjecišta C i D kružnice s osi ε predstavljaju glavne deformacije ε_1 i ε_2 u točki tijela. Element u glavnim pravcima ne mijenja svoj oblik, tj. pravi kutovi ostaju pravi, slika c1). Glavna deformacija $\varepsilon_1 = \varepsilon_{\max}$ određena je točkom C $(\varepsilon_1, 0)$, a druga glavna deformacija $\varepsilon_2 = \varepsilon_{\min}$ određena je točkom D $(\varepsilon_2, 0)$.

- Kroz točku A povlači se paralela s normalom u A na elementu, tj. s osi x i ona presijeca kružnicu u točki pola P. Pravci 1 i 2 koji prolaze kroz pol P i točke C i D. Kut φ_0 mjereno od osi x određuje glavni pravac 1. Deformirani element u okolišu promatrane točke M tijela u glavnim pravcima deformacija prikazan je na slici c1).

- Komponente deformacije u točki M tijela za zarotirani $(0\bar{x}\bar{y})$ - koordinatni sustav, slika b1), gdje je φ kut rotacije od osnovnog $(0xy)$ - koordinatnog sustava, jednostavno se određuju tako da se iz pola P povlače paralele s osi \bar{x} i s osi \bar{y} . Ti pravci sijeku Mohrovu kružnicu u točki E kojoj apscisa i ordinata određuju komponente deformacije $\bar{\varepsilon}_x$ i $\frac{1}{2}\bar{\gamma}_{xy}$, odnosno na presjecištu osi \bar{y} u točki F određene su komponente deformacije $\bar{\varepsilon}_y$ i $\frac{1}{2}\bar{\gamma}_{yx}$.



- Vrijednosti maksimalne kutne deformacije $\gamma_{xy \max}$ i pripadajući pravac normale presjeka \bar{n} definiran kutom φ_N određeni su točkom $G(\varepsilon_S, \frac{1}{2}\gamma_{xy \max})$, odnosno pravcem \bar{n}_1 kroz točku $H(\varepsilon_S, \frac{1}{2}\gamma_{xy \max})$ na Mohrovoj kružnici deformacija. Za te osi sve duljinske deformacije jednake su srednjoj duljinskoj deformaciji ε_S u točki M tijela. Deformacije elementa u okolišu promatrane točke M tijela u tim pravcima, kod maksimalne kutne deformacije $\gamma_{xy \max}$, prikazane su na slici d1).

Napomena: Nakon izračunatih komponenti deformacija u $(0xy)$ - koordinatnom sustavu, može se grafičko rješenje Mohrove kružnice deformacije dobiti uporabom modula «Mohr's circle» programa «MDSolids®».