

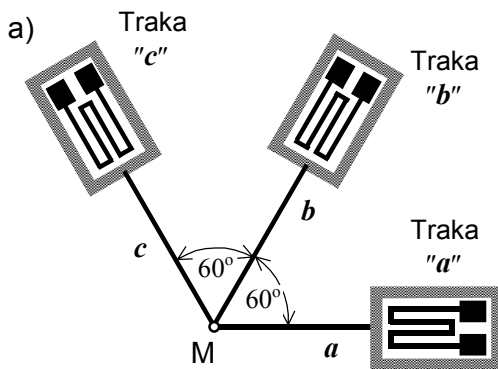
**Primjer 3. Mjerenje deformacije pomoću mjerne rozete 0/60/120°**

Na površini tijela koje je u ravninskom stanju naprezanja, u točki M u  $(x, y)$  - ravnini izmjerene su pomoću mjerne rozete 0/60/120° komponente deformacije u pravcima osi  $a$ ,  $b$  i  $c$ , slika a).

Treba odrediti analitički i grafički pomoću Mohrove kružnice deformacija:

- a) glavne pravce i vrijednosti glavnih deformacija u mjernoj točki,
- b) komponente deformacije u smjerovima koordinatnih osi  $x$  i  $y$ ,
- c) iznos maksimalne kutne deformacije s pripadnim duljinskim deformacijama.

Skicirati orijentirane početne i deformirane elemente u točki M tijela, s naznačenim komponentama deformacije u svim analiziranim koordinatnim sustavima.



**Zadano:**  $\varepsilon_a = -600 \times 10^{-6}$ ,  $\varepsilon_b = 500 \times 10^{-6}$ ,  
 $\varepsilon_c = 1000 \times 10^{-6}$ .

Mjerilo za Mohrovu kružnicu deformacija:  
 $1 \text{ cm} \hat{=} 200 \times 10^{-6}$

**Rješenje:**

**1. Analitičko rješenje:**

a) Glavne deformacije u točki M tijela za mjernu rozetu 0/60/120° iznose (prema izrazima kod mjerenja **metodom tenzometrije**):

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_c}{3} \pm \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_a - \varepsilon_b)^2 + (\varepsilon_b - \varepsilon_c)^2 + (\varepsilon_c - \varepsilon_a)^2} =$$

$$= \left[ \frac{-600 + 500 + 1000}{3} \pm \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(-1100)^2 + (-500)^2 + 1600^2} \right] \cdot 10^{-6} = (900 \pm 2835,49) \cdot \frac{10^{-6}}{3},$$

$$\varepsilon_1 = (900 + 2835,49) \cdot \frac{10^{-6}}{3} = 1245,16 \times 10^{-6},$$

$$\varepsilon_2 = (900 - 2835,49) \cdot \frac{10^{-6}}{3} = -645,16 \times 10^{-6}.$$

Kut glavnih pravaca deformacija jest:

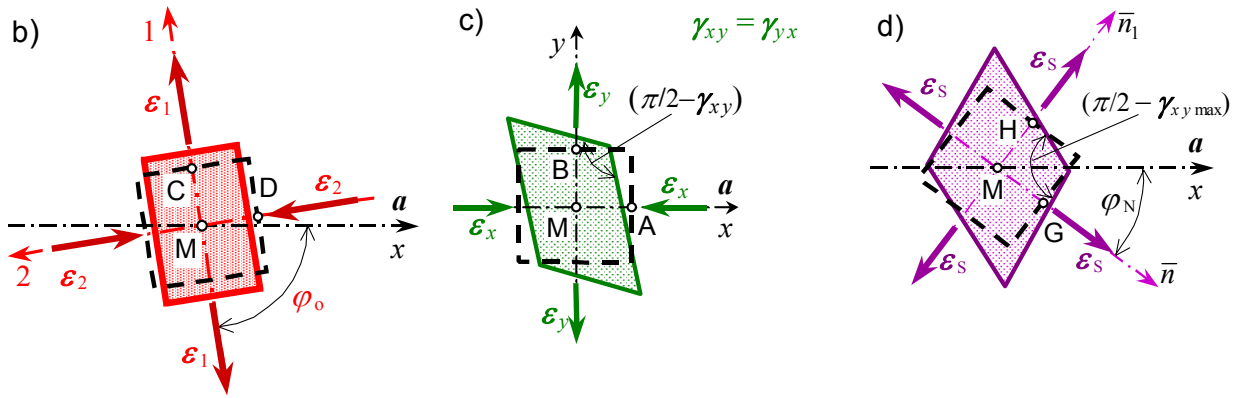
$$\tan 2\psi = \frac{\sqrt{3}(\varepsilon_c - \varepsilon_b)}{2\varepsilon_a - (\varepsilon_b + \varepsilon_c)} = \frac{\sqrt{3}(1000 - 500)}{2(-600) - (500 + 1000)} = 0,32075,$$

slijedi:  $2\psi \approx 17,8^\circ$ , odnosno  $\psi = 8,9^\circ$ .

Glavni pravac deformacija 1 s koordinatnom osi  $x$  čini kut:

$$\varphi_0 = \psi - 90^\circ = 8,9^\circ - 90^\circ = -81,1^\circ.$$

Orijentirani element s glavnim deformacijama u glavnim pravcima prikazan je na slici b).



b) Komponente deformacija u točki M tijela u pravcima koordinatnih osi  $x$  i  $y$ , kad se os  $x$  podudara s osi  $a$  i os  $y$  s osi  $c$  mjerne rozete  $0/60/120^\circ$ , mogu se odrediti iz sljedećih izraza tenzometrije:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_a = -600 \times 10^{-6},$$

$$\varepsilon_y = \frac{2(\varepsilon_b + \varepsilon_c) - \varepsilon_a}{3} = [2(500 + 1000) - (-600)] \cdot \frac{10^{-6}}{3} \Rightarrow \varepsilon_y = 1200 \times 10^{-6}.$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2}{\sqrt{3}}(\varepsilon_b - \varepsilon_c) = \frac{2 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{3}}(500 - 1000),$$

$$\gamma_{xy} = -577,35 \times 10^{-6} \text{ rad.}$$

Element u okolišu točke M tijela s komponentama deformacija u pravcima koordinatnih osi  $x$  i  $y$  prikazan je na slici c).

c) Apsolutni iznos maksimalne kutne deformacije u točki M tijela jest:

$$\gamma_{xy \max} = |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| = |1245,16 - (-645,16)| \cdot 10^{-6},$$

$$\text{odnosno } \gamma_{xy \max} = 1890,32 \times 10^{-6} \text{ rad,}$$

a pripadne srednje duljinske deformacije su:

$$\varepsilon_s = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} = \frac{-600 + 1200}{2} \cdot 10^{-6} = 300 \times 10^{-6}.$$

Pravac normale  $\bar{n}$  presjeka u kojem je maksimalna kutna deformacija određen je kutom  $\varphi_N$  mjenom od osi  $x$ :

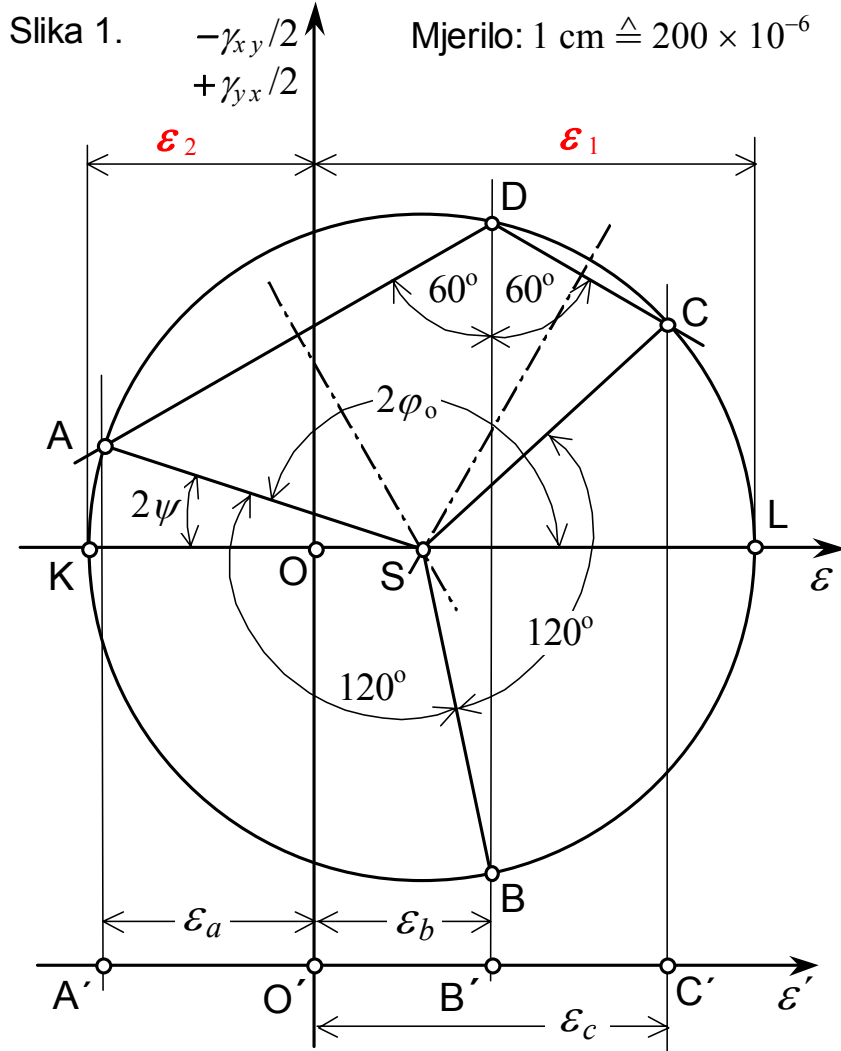
$$\varphi_N = \varphi_0 + \pi/2 = -81,1^\circ + 45^\circ = -36,1^\circ.$$

Orijentirani element s ucrtanim maksimalnim kutnim i pripadnim duljinskim deformacijama prikazan je na slici d).

## 2. Grafičko rješenje pomoću Mohrove kružnice deformacija:

- U pomoćnom koordinatnom sustavu  $(O' \varepsilon' \frac{\gamma}{2})$  crtaju se točke A', B' i C' kojima apscise u zadanom mjerilu predstavljaju izmjerene duljinske deformacije  $\varepsilon_a$ ,  $\varepsilon_b$  i  $\varepsilon_c$ , slika 1. U tim se točkama podižu okomice na pomoćnu os  $\varepsilon'$ . Odabire se proizvoljna točka D na okomici kroz točku B'. Iz točke D povlače se pravci koji s okomicom kroz točku B' čine kutove od  $60^\circ$ . Presjecišta tih pravaca s okomicama kroz točke A' i C' određuju točke A i C.

U presjecištu simetrala dužina  $\overline{AD}$  i  $\overline{CD}$  nalazi se središte Mohrove kružnice deformacija. Sada se opiše kružnica kroz točke C, D i A. Okomica kroz B' siječe kružnicu u točki B. Kutovi  $\angle ASB$  i  $\angle BSC$  iznose  $120^\circ$ . Točke K i L definiraju glavne deformacije  $\varepsilon_1$  i  $\varepsilon_2$ . Glavni pravac deformacija  $\varepsilon_1$  otklonjen je od pravca  $a$  za kut  $2\varphi_0$  u smislu gibanja kazaljke na satu, slika b).



Mohrova kružnica deformacija s ucrtanim polom P omogućuje uobičajeno označavanje svih relevantnih deformacija i kutova, slika 2.

Točke na okomici kroz središte S kružnice određuju točke G i H u kojima je polovična maksimalna kutna deformacija  $\frac{1}{2}\gamma_{xy\max}$ , a sve duljinske deformacije su jednake su srednjoj duljinskoj deformaciji  $\varepsilon_S$  u točki M tijela. Pravac normale  $\bar{n}$  određen je kutom  $\varphi_N$  povlačenjem iz pola P pravca PG kroz točku G.

Svi orijentirani elementi u točki M tijela, u početnom i deformiranom obliku s naznačenim komponentama deformacije u promatranim koordinatnim osima, prikazani su na slikama b), c) i d).

