

Primjer 1. Analiza deformacije kod ravninskog stanja napreznja

U točki M tijela koje je u ravninskom stanju napreznja u (x, y) -ravnini, zadane su komponente deformacije u smjerovima osi $(0xy)$ - koordinatnog sustava, prema slici a).

Treba odrediti analitički i grafički pomoću Mohrove kružnice deformacija:

- komponente duljinskih i kutnih deformacija u smjerovima osi $(0\bar{x}\bar{y})$ - koordinatnog sustava koji je zakrenut za kut $\varphi = 40^\circ$ od osi x ,
- glavne pravce i iznose glavnih deformacija,
- vrijednost maksimalne kutne deformacije s pripadnim duljinskim deformacijama.

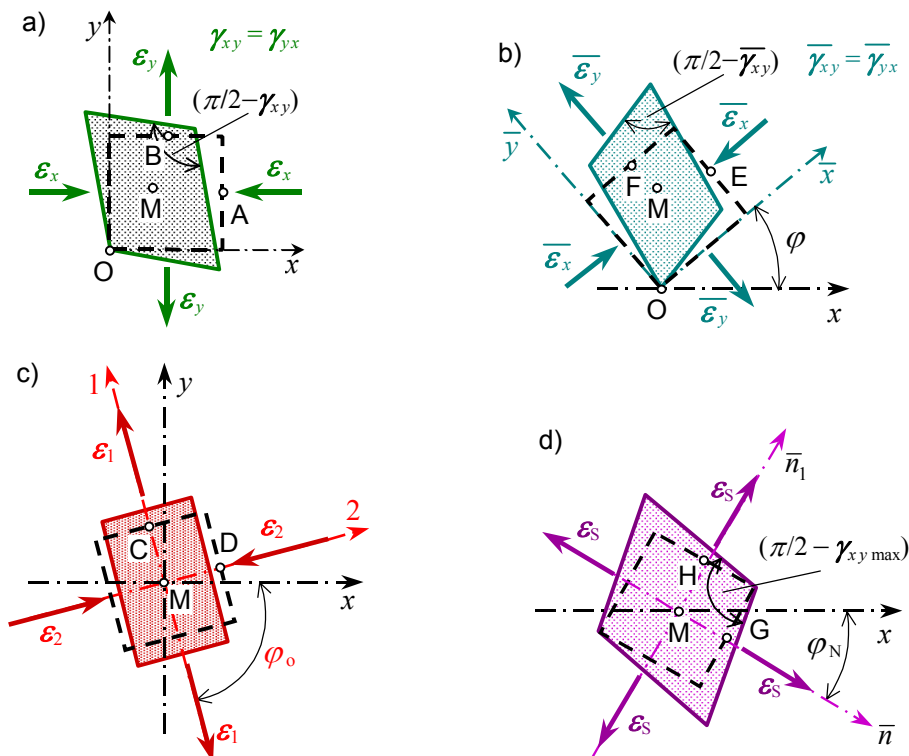
Skicirati orijentirane elemente u točki M tijela, s naznačenim komponentama deformacije u svim analiziranim koordinatnim sustavima.

Zadano: $\varepsilon_x = -650 \cdot 10^{-6}$, $\varepsilon_y = 750 \cdot 10^{-6}$, $\gamma_{xy} = -800 \cdot 10^{-6}$ rad.

Mjerilo za Mohrovu kružnicu deformacija: $1 \text{ cm} = 200 \cdot 10^{-6}$.

Rješenje:

Na slici elementa u okolišu točke M tijela u početnom obliku (crtkana linija) označeni su presjeci A i B sa zadanim komponentama deformacija u pravcima koordinatnih osi x i y , a punom linijom nacrtna je deformirani izgled elementa, slika a).



1. Analitičko rješenje

a) Komponente deformacije elementa u presjecima E i F, tj. u pravcima osi zarotiranog $(0\bar{x}\bar{y})$ - koordinatnog sustava, slika b), su:

$$\bar{\varepsilon}_x = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\varphi + \frac{1}{2} \gamma_{xy} \sin 2\varphi,$$

$$\frac{1}{2} \bar{\gamma}_{xy} = \frac{1}{2} \bar{\gamma}_{yx} = -\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \sin 2\varphi + \frac{1}{2} \gamma_{xy} \cos 2\varphi,$$

$$\bar{\varepsilon}_y = \varepsilon_x + \varepsilon_y - \bar{\varepsilon}_x.$$

Radi jednostavnijeg izračunavanja, prvo se odrede vrijednost srednje duljinske deformacije ε_S (apscisa središta S Mohrove kružnice deformacije) i polurazlika duljinskih deformacija, te iznose odgovarajućih trigonometrijskih funkcija za zadani kut rotacije koordinatnog sustava $\varphi = 40^\circ$:

$$\varepsilon_S = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} = \frac{-650 + 750}{2} \cdot 10^{-6} = 50 \cdot 10^{-6}, \quad \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} = \frac{-650 - 750}{2} \cdot 10^{-6} = -700 \cdot 10^{-6},$$

$$\cos 2\varphi = \cos(80^\circ) = 0,17365, \quad \sin 2\varphi = \sin(80^\circ) = 0,98481.$$

Uvrštavanjem ovih vrijednosti dobivaju se iznosi komponenti deformacija u presjecima E i F, (iznosi deformacija zaokruženi su na dva decimalna mjesta):

$$\bar{\varepsilon}_x = (50 - 700 \cdot 0,17365 - 400 \cdot 0,98481) \cdot 10^{-6} \Rightarrow \bar{\varepsilon}_x = -465,48 \cdot 10^{-6},$$

$$\frac{1}{2} \bar{\gamma}_{xy} = \frac{1}{2} \bar{\gamma}_{yx} = (700 \cdot 0,98481 - 400 \cdot 0,17365) \cdot 10^{-6} \Rightarrow \frac{1}{2} \bar{\gamma}_{xy} = \frac{1}{2} \bar{\gamma}_{yx} = 619,91 \cdot 10^{-6} \text{ rad},$$

$$\text{odnosno } \bar{\gamma}_{xy} = \bar{\gamma}_{yx} = 1239,81 \cdot 10^{-6} \text{ rad},$$

$$\bar{\varepsilon}_y = (-650 + 750 - (-465,48)) \cdot 10^{-6} \Rightarrow \bar{\varepsilon}_y = 565,48 \cdot 10^{-6}.$$

b) Vrijednosti glavnih deformacija u točki tijela su:

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \bar{\gamma}_{xy}\right)^2} = \left(50 \pm \sqrt{700^2 + 400^2}\right) \cdot 10^{-6} = (50 \pm 806,23) \cdot 10^{-6},$$

$$\varepsilon_1 = (50 + 806,23) \cdot 10^{-6} = 856,23 \cdot 10^{-6},$$

$$\varepsilon_2 = (50 - 806,23) \cdot 10^{-6} = -756,23 \cdot 10^{-6}.$$

Kut glavnih pravaca deformacija jest:

$$\tan 2\varphi'_0 = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} = \frac{-800}{-1400} = 0,57143,$$

$$\text{slijedi: } 2\varphi'_0 = 29,75^\circ, \text{ odnosno } \varphi'_0 = 14,87^\circ.$$

Glavni pravac deformacija 1 s osi x čini kut:

$$\varphi_0 = \varphi'_0 - 90^\circ = 14,87^\circ - 90^\circ \Rightarrow \varphi_0 = -75,13^\circ.$$

Orijentirani element s glavnim deformacijama u glavnim pravcima deformacija prikazan je na slici c).

c) Apsolutni iznos maksimalne kutne deformacije u točki M tijela jest:

$$\frac{1}{2} \gamma_{xy \max} = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \bar{\gamma}_{xy}\right)^2} = \left(\sqrt{700^2 + 400^2}\right) \cdot 10^{-6} = 806,23 \cdot 10^{-6} \text{ rad},$$

$$\text{odnosno } \gamma_{xy \max} = 1612,45 \cdot 10^{-6} \text{ rad},$$

a pripadajuće srednje duljinske deformacije su: $\varepsilon_S = 50 \cdot 10^{-6}$.

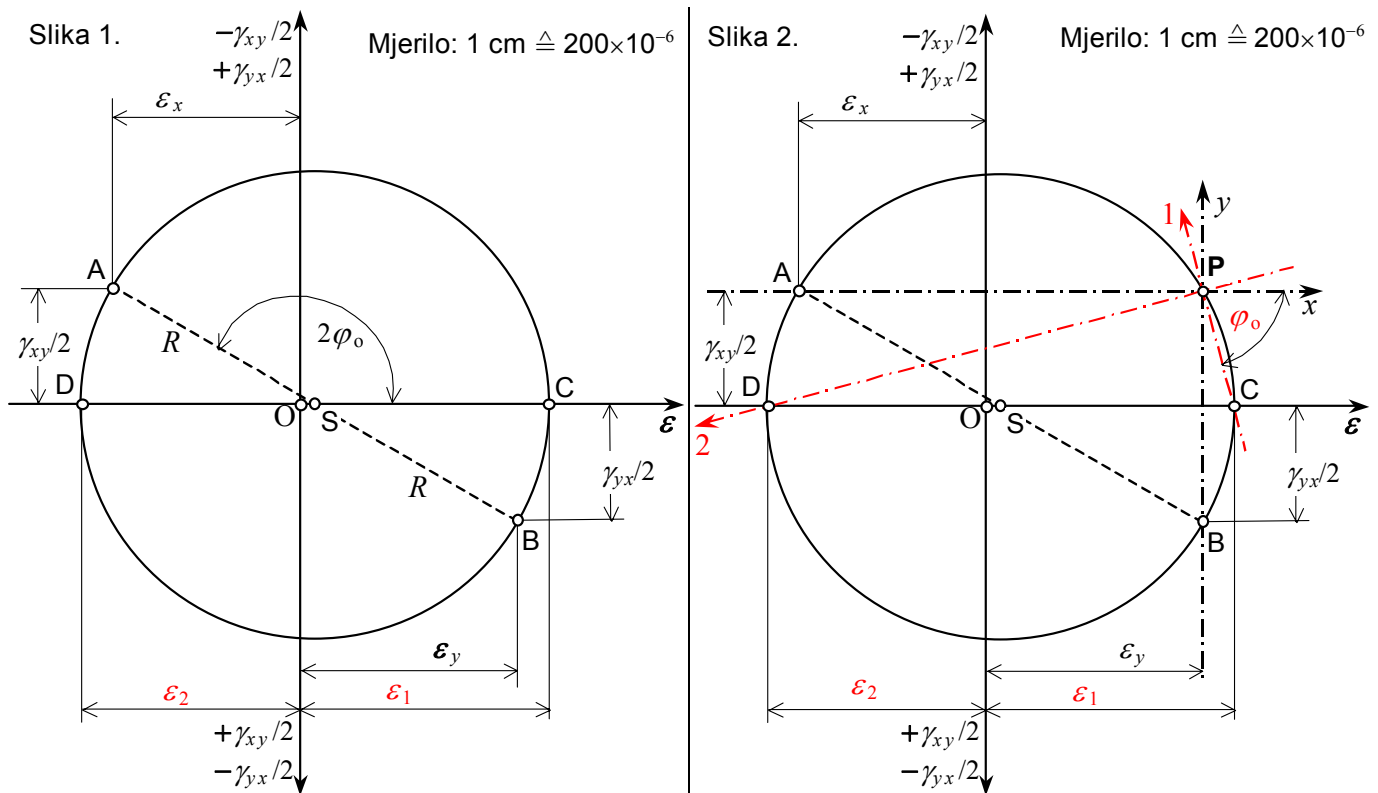
Pravac normale \bar{n} presjeka u kojem je maksimalna kutna deformacija određen je kutom od osi x :

$$\varphi_N = \varphi_0 + \pi/2 = -75,13^\circ + 45^\circ = -30,13^\circ.$$

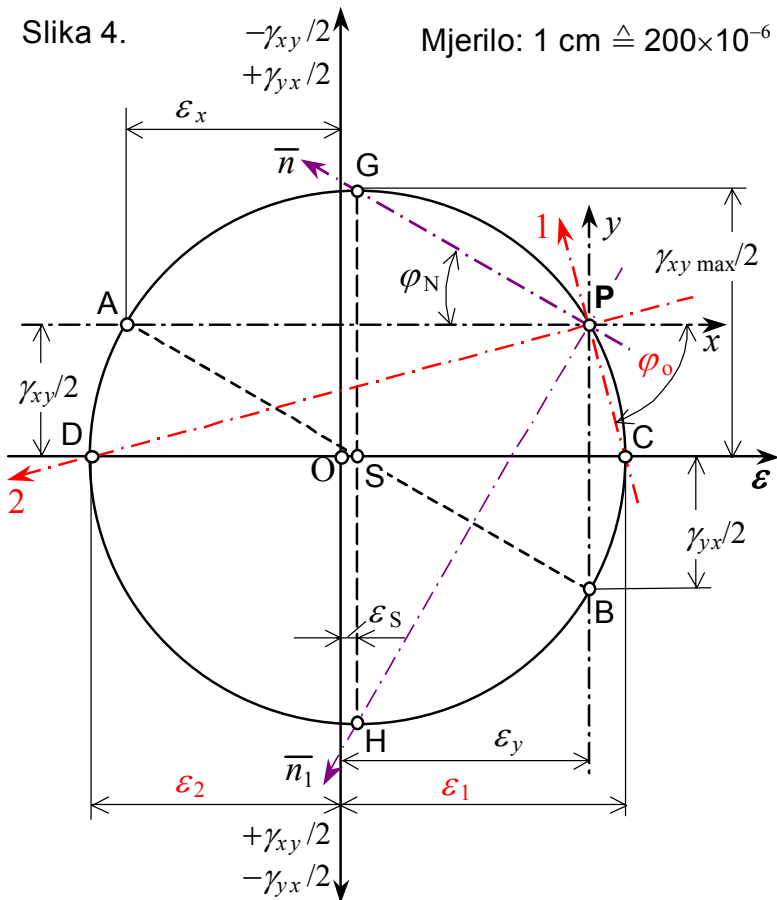
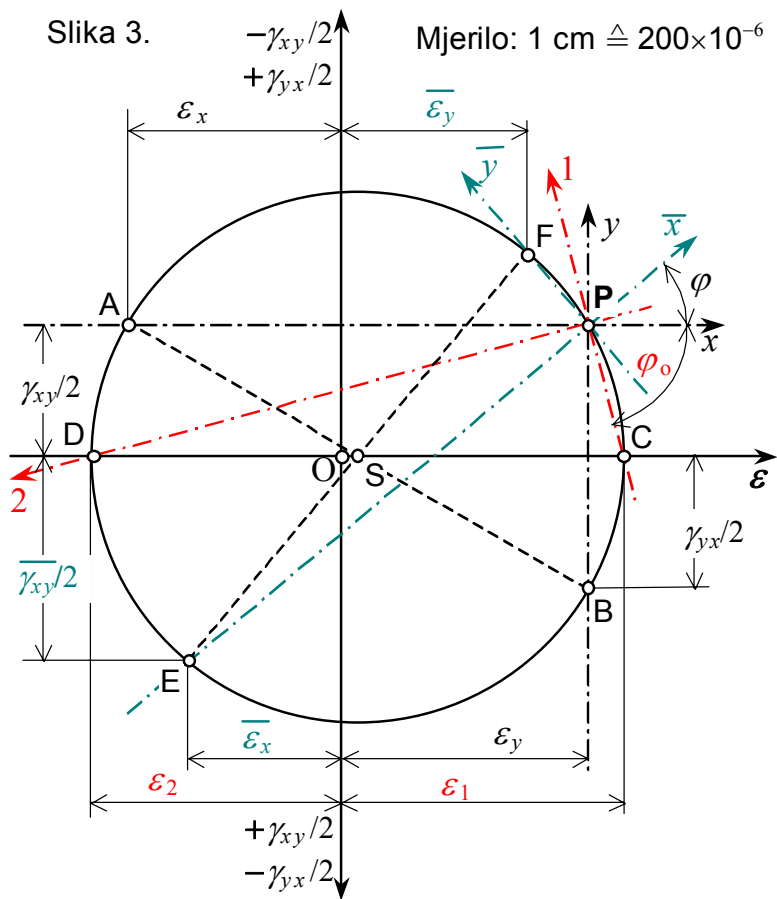
Orijentirani element s ucrtanim maksimalnim kutnim i pripadajućim duljinskim deformacijama prikazan je na slici d).

2. Grafičko rješenje pomoću Mohrove kružnice deformacija

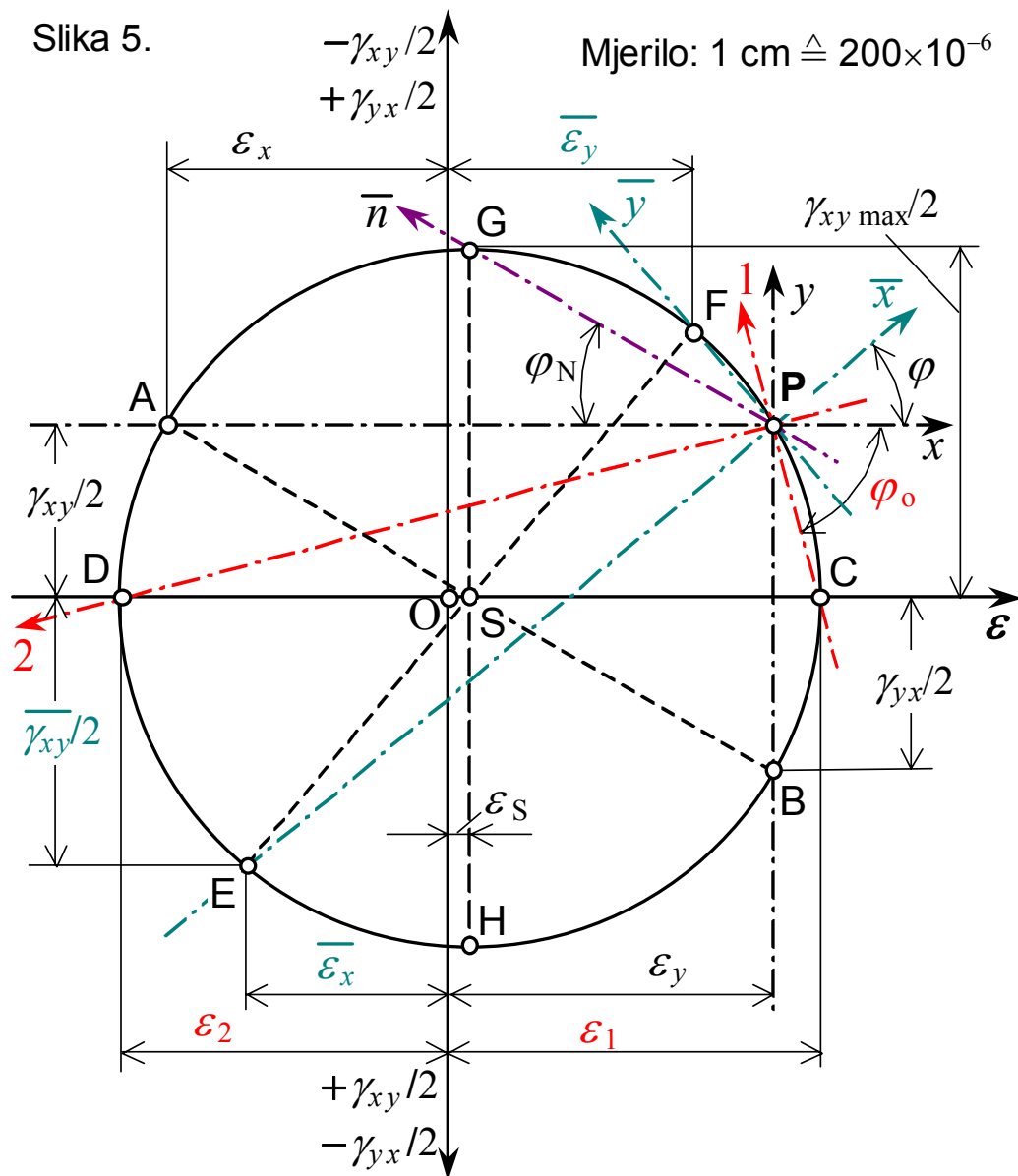
- U koordinatnom sustavu $(0\varepsilon\frac{\gamma}{2})$ u zadanom mjerilu crtaju se točke $A(-650, -400)$ i $B(750, -400)$ koje predstavljaju komponente deformacije u osima x i y , označene na elementu presjecima A i B, slika 1.
- Sjecište spojnice \overline{AB} i osi ε određuje središte S kružnice.
- Iz središta S opiše se kružnica polumjera $R = \overline{AS} = \overline{SB}$.
- Kružnica siječe os ε u točkama C i D, čime su određene vrijednosti glavnih deformacija u mjerilu: $\varepsilon_1 = \overline{OC}$ i $\varepsilon_2 = \overline{OD}$.



- Paralela s osi x kroz točku A presijeca kružnicu u točki **pola P** Mohrove kružnice, slika 2.
- Pravac PC definira kut φ_0 glavnog pravca deformacija 1, a pravac PD je glavni pravac deformacija 2 u točki M tijela.
- Za određivanje komponenti deformacije u smjerovima osi $(0\bar{x}\bar{y})$ - koordinatnog sustava zarotiranog za kut φ prema osima $(0xy)$ - koordinatnog sustava, slika 3, povlače se iz pola P pravci paralelni s osima \bar{x} i \bar{y} čija presjecišta u točkama E i F kružnice određuju u mjerilu iznose deformacija $\bar{\varepsilon}_x$, $\frac{1}{2}\bar{\gamma}_{xy}$, odnosno $\bar{\varepsilon}_y$ i $\frac{1}{2}\bar{\gamma}_{yx}$.
- Točke na okomici kroz središte S kružnice određuju točke G i H u kojima je polovična maksimalna kutna deformacija $\frac{1}{2}\gamma_{xy \max}$, a sve duljinske deformacije jednake su srednjoj duljinskoj deformaciji ε_S u točki M tijela, slika 4. Pravac normale \bar{n} određen je kutom φ_N povlačenjem iz pola P pravca PG kroz točku G.



Naravno, sve se crta na istoj Mohrovoj kružnici tako da je njen konačni crtež dan na slici 5.



- Svi orijentirani elementi u točki M tijela, u početnom i deformiranom obliku s naznačenim komponentama deformacije u promatranim koordinatnim osima, prikazani su na slikama b), c) i d).

Napomena za rješavanje zadatka na PC:

Analitičko i grafičko rješenje ovog primjera može se dobiti uporabom modula «Mohr's circle» programa «MDSolids®».