

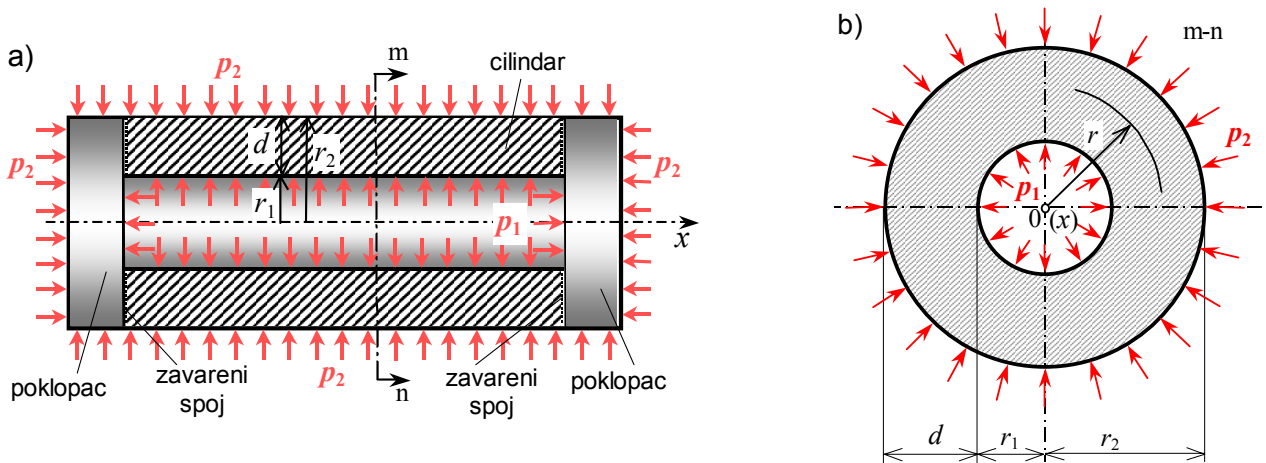
NAPREZANJA I POMACI DEBELOSTJENE POSUDE I CIJEVI

1. Debelostjena posuda opterećena unutarnjim i vanjskim tlakom

Osnosimetrično tijelo u obliku debele cijevi ili cilindrične posude smatra se debelostjenom cijevi ili posudom, ako je debljina stijenke d veća od 0,1 srednjeg polumjera, tj. mora biti ispunjen uvjet, slika 4:

$$d = r_2 - r_1 > \frac{1}{10} \cdot \frac{r_1 + r_2}{2} \quad (18)$$

Opterećenje debelostjene posude jednoliko je raspodijeljeno u radialnom smjeru uzduž posude, po unutarnjoj površini posude djeluje tlak p_1 a po vanjskoj površini tlak p_2 .



Slika 4. Primjer opterećenja debelostjene posude unutarnjim i vanjskim tlakom

Za slučaj bez rotacije $\omega = 0$ kao i bez promjene temperature stijenke posude (ili cijevi), diferencijalna jednadžba elementa (12) ima oblik:

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (u \cdot r) \right] = 0 \quad (19)$$

Opće rješenje diferencijalne jednadžbe (19) jest:

$$u = C_1 r + \frac{C_2}{r} \quad (20)$$

Konstante integracije C_1 i C_2 određuju se iz rubnih uvjeta opterećenja debelostjene posude (debele cijevi).

Uvođenjem pomoćnih konstanti A i B u izraz (20):

$$A = \frac{E}{1-\nu} \cdot C_1, \quad B = \frac{E}{1+\nu} \cdot C_2 \quad (21)$$

slijede prema [izrazima \(8\) i \(9\)](#), izrazi za radialne i cirkularne (tangencijalne) komponente naprezanja u stijenki debelostjene posude:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= A - \frac{B}{r^2}, \\ \sigma_\varphi &= A + \frac{B}{r^2}, \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

odnosno: $\sigma_r + \sigma_\varphi = 2A = \text{konst.}$

Iz rubnih uvjeta opterećenja debelostjene posude (debele cijevi) za polumjere r_1 i r_2 , slika 4), vrijedi za radijalne komponente naprezanja:

$$\sigma_r(r_1) = A - \frac{B}{r_1^2} = -p_1 \text{ i } \sigma_r(r_2) = A - \frac{B}{r_2^2} = -p_2, \quad (23)$$

te slijede izrazi za konstante A i B :

$$A = \frac{p_1 \cdot r_1^2 - p_2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}, \quad B = \frac{(p_1 - p_2) \cdot r_1^2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}. \quad (24)$$

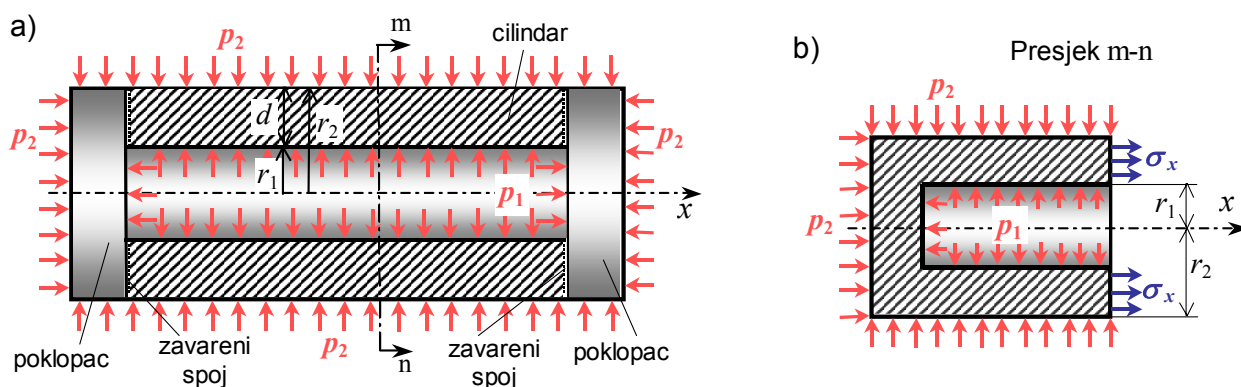
Uvođenjem konstanti A i B u izraze (22), slijede konačni izrazi za naprezanja:

$$\sigma_r = \frac{p_1 \cdot r_1^2 - p_2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{(p_1 - p_2) \cdot r_1^2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r^2}, \quad (25)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{p_1 \cdot r_1^2 - p_2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{(p_1 - p_2) \cdot r_1^2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r^2}. \quad (26)$$

Kod otvorene debelostjene posude, npr. slika 1.b), uzdužno je naprezanje $\sigma_x = 0$.

Kod zatvorene debelostjene posude, npr. slika 4.a), uzdužno naprezanje σ_x u presjecima dovoljno udaljenim od dna posude, slika 5.a), jednoliko je raspodijeljeno po poprečnom presjeku, slika 5.b), a određuje se iz uvjete ravnoteže sila (27) na dijelu posude:



Slika 5. Naprezanje u poprečnom presjeku debelostjene posude

$$\sum F_x = 0: \sigma_x \cdot \pi \cdot (r_2^2 - r_1^2) + p_2 \cdot \pi \cdot r_2^2 - p_1 \cdot \pi \cdot r_1^2 = 0, \quad (27)$$

odakle slijedi izraz za uzdužno naprezanje σ_x u poprečnom presjeku:

$$\sigma_x = \frac{p_1 \cdot r_1^2 - p_2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}. \quad (28)$$

Usporedbom izraza (28) s izrazima (25) i (26), vidljivo je da je u danom slučaju, uzdužno naprezanje σ_x u poprečnom presjeku jednako srednjoj vrijednosti radijalne i cirkularne komponente naprezanja debelostjene posude, tj.:

$$\sigma_x = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\varphi) = A = \text{konst.} \quad (29)$$

Uvrštavanjem izraza (24) u (21) određene su konstante integracije C_1 i C_2 :

$$C_1 = \frac{1-\nu}{E} \cdot A = \frac{1-\nu}{E} \cdot \frac{p_1 \cdot r_1^2 - p_2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \quad \text{i} \quad C_2 = \frac{1+\nu}{E} \cdot B = \frac{1+\nu}{E} \cdot \frac{(p_1 - p_2) \cdot r_1^2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}. \quad (30)$$

Konačno, uvrštavanjem konstanti konstante integracije C_1 i C_2 u izraz (20), slijedi izraz za određivanje radijalnog pomaka u točke stijenke **zatvorene** debelostjene posude (debele cijevi):

$$u = \frac{1-\nu}{E} \cdot \frac{p_1 \cdot r_1^2 - p_2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot r + \frac{1+\nu}{E} \cdot \frac{(p_1 - p_2) \cdot r_1^2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r} - \frac{\nu}{E} \cdot \sigma_x \cdot r. \quad (31)$$

Ovaj se izraz može pojednostaviti, ako je već izračunato uzdužno naprezanje σ_x u poprečnom presjeku posude (izraz 28), kako slijedi:

$$u = \frac{1-\nu}{E} \cdot \sigma_x \cdot r + \frac{1+\nu}{E} \cdot \frac{(p_1 - p_2) \cdot r_1^2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r} - \frac{\nu}{E} \cdot \sigma_x \cdot r, \text{ te slijedi:}$$

$$u = \frac{1-2\nu}{E} \cdot \sigma_x \cdot r + \frac{1+\nu}{E} \cdot \frac{(p_1 - p_2) \cdot r_1^2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r}. \quad (31a)$$

Za točke na unutarnjoj površini zatvorene debelostjene posude, radijalni je pomak:

$$(u)_{r=r_1} = \frac{1-2\nu}{E} \cdot \sigma_x \cdot r_1 + \frac{1+\nu}{E} \cdot \frac{(p_1 - p_2) \cdot r_1^2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r_1} = \frac{r_1}{E} \cdot \left[(1-2\nu) \cdot \sigma_x + (1+\nu) \cdot \frac{(p_1 - p_2) \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \right],$$

a za točke na vanjskoj površini zatvorene debelostjene posude, radijalni je pomak:

$$(u)_{r=r_2} = \frac{1-2\nu}{E} \cdot \sigma_x \cdot r_2 + \frac{1+\nu}{E} \cdot \frac{(p_1 - p_2) \cdot r_1^2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r_2} = \frac{r_2}{E} \cdot \left[(1-2\nu) \cdot \sigma_x + (1+\nu) \cdot \frac{(p_1 - p_2) \cdot r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \right].$$

Kod **otvorene** debelostjene posude je uzdužno naprezanje $\sigma_x = 0$, te otpada posljednji član u izrazu (31).

Izrazi (25), (26) i (31) poznati su u literaturi pod imenom **Lamé-ove formule**.

Ovi izrazi za deformacije i naprezanja σ_r , σ_φ i σ_x vrijede samo u presjecima dovoljno udaljenim od dna (tzv. dna) zatvorene debelostjene posude. U blizini dna posude su izrazi za deformacije i naprezanja σ_r , σ_φ i σ_x znatno složeniji, te se kod proračuna rabe analitičke metode Teorije elastičnosti ili numeričke metode, npr. metoda konačnih elemenata, uz uporabu računala.

U inženjerskoj praksi su debelostjene posude (debele cijevi) najčešće opterećene ili samo unutarnjim tlakom p_1 ili samo vanjskim tlakom p_2 .

Kod opterećenja cijevi istodobno s unutarnjim tlakom p_1 i s vanjskim tlakom p_2 , naprezanja i deformacije debele cijevi mogu se odrediti primjenom *principa superpozicije*, tj. komponente naprezanja i pomaka određuju se posebno za unutarnji tlak p_1 i za vanjski tlak p_2 , a konačni rezultati dobivaju se zbrajanjem pripadajućih komponenti naprezanja odnosno pomaka.

[Numerički primjeri](#) dani su u riješenim zadacima iz ovog područja.